بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

شرحی بر مکانیک کوانتومی

(جلد دوم)

ابوالفضل فرداد   ندا حجاری

سر شناسنامه	:	**فرداد، ابوالفضل ،۱۳۵۰-**
عنوان و نام پدید آور	:	شرحی بر مکانیک کوانتومی (جلد اول) /ابوالفضل فرداد- ندا حجاری
مشخصات نشر	:	**تهران ، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی ،۱۳۸۷،**
مشخصات ظاهری	:	**۲ ج: مصور ،جدول ، نمودار .**
شابک	:	**۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۱۹-۱ :ج.۲. ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۱۸-۴،۹۷۸ -۹۶۴-۲۶۵۱-۲۰-۷،**
وضعیت فهرست نویسی	:	**فیپا**
یادداشت	:	**کوانتم- راهنمای آموزشی(عالی)**
موضوع	:	**کوانتم – مسائل ،تمرین ها و غیره (عالی)**
موضوع	:	**کوانتم- آزمون ها وتمرین ها (عالی).**
شناسه افزوده	:	**حجازی ، ندا ، ۱۳۵۱.**
شناسه افزوده	:	**دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی .**
رده بندی کنگره	:	**QC ۱۷۴/۱۴ ف ۴ ش۴ ۱۳۸۷**
رده بندی دیویی	:	**۵۳۰/۱۲۰۷**
شماره کتابشناسی ملی	:	**۱۵۳۷۴۰۲**

عنوان	:	شرحی بر مکانیک کوانتومی (جلددوم)
تألیف	:	/ابوالفضل فرداد- ندا حجار
انتشارات	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
چاپ اول	:	زمستان ۱۳۸۷
حروف نگاری	:	طرح و نشر هامون (فاطمه نظری)
طراح جلد	:	حسین مجلسی
رسم شکل ها	:	محمد هادی مجلسی
لیتوگرافی	:	یاس
چاپ	:	عمران
شمارگان	:	۱۰۰۰ جلد
قیمت دوره ۲ جلدی	:	۱۶۰۰۰تومان
شابک(جلد اول)	:	۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۱۹-۱ ISBN: 978—964-2651-19-1(VoI.1)
شابک(دوره)	:	۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۲۰-۷ ISBN:978-964-2651-20-7(2VoI.Set)

نشانی: تهران، لویزان – کد پستی ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸ – صندوق پستی ۱۶۳ – ۱۶۷۸۵ – تلفن: (۲۶۳۲) ۹ – ۲۲۹۷۰۰۶۰، ۲۲۹۷۰۰۷۰، نمابر: ۲۲۹۷۰۰۰۳، پست الکترونیکی: Publish@srttu.edu، وب سایت: http://Publish.srttu.edu

تقدیم به همه آنهائیکه دوستشان داریم

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل ۱: سرچشمهٔ پیدایش نظریهٔ مکانیک کوانتومی، تابش جسم سیاه

عنوان **صفحه**

فصل ۲: دوگانگی موج ـ ذره‌ای

فصل ۳: تک‌موج‌ها و بسته‌موج

عنوان **صفحه**

فصل ۴ : معادلهٔ شرودینگر

عنوان صفحه

فصل ۵: معادلات ویژه مقداری، قضیهٔ بسط و عملگر پاریته

عنوان **صفحه**

فصل ۶: پتانسیل‌های سادهٔ یک‌بعدی

عنوان **صفحه**

فصل ۷: فرمولبندی مکانیک کوانتومی، روش‌های عملگری I

عنوان **صفحه**

فصل ۸: فرمولبندی مکانیک کوانتومی، روش‌های عملگری II

فصل ۹: اندازه حرکت زاویه‌ای مداری

عنوان صفحه

فصل ۱۰: حل معادله شرودینگر در سه بعد (حالت‌های مانا) و اتم هیدروژن (مدل غیرنسبیتی)

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فصل ۱۱: نمایش ماتریس توابع موج و عملگرها

عنوان **صفحه**

فصل ۱۲: اسپین

عنوان صفحه

Chapter 8

Formalism of Quantum Mechanics, Operator Methods II

فصل ۸

فرمولبندی مکانیک کوانتومی، روشهای عملگری *II*

۸-۱) فضای کت

۸-۲) طیف انرژی نوسانگر هارمونیک

۸-۳) تغییر پایه‌های فضا و عملگر تبدیل

۸-۴) عملگر تحوّل زمانی

۸-۵) تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ

۸-۶) نوسانگر هارمونیک ساده، تصاویر شرودینگر و هایزنبرگ

مقدمه Introduction

در این فصل قصد داریم به بررسی رویدادها در فضای برداری مختلطی بپردازیم که نسبت به مسئله مورد بررسی کاملاً انعطاف داشته و ابعاد آن برحسب طبیعت سیستم فیزیکی مورد مشاهده ما تعیین می‌گردد. بطور مثال در حالتیکه با طیف پیوسته‌ای سر و کار داریم (مثل مکان و اندازه حرکت ذرهٔ آزاد) تعداد حالات ممکن بطور فزاینده‌ای افزایش یافته و فضای برداری متناظر با سیستم مورد بررسی نیز فضای هیلبرت *(Hilbert Space)* نامیده می‌شود (هیلبرت نخستین ریاضیدانی است که فضاهای برداری، با بعد بی‌نهایت را بررسی نمود).

قصد داریم شما را با نمادهای دیراک که بردارهای حالت این فضای برداری مختلط می‌باشند، آشنا نموده و در ادامه این واقعیت را تفهیم نمائیم که قضایا و روابط بدست آمده در این روش از جامعیت و سادگی بی‌نظیری برخوردار بوده و ضمناً از هر نوع نمایش به خدمت گرفته شده‌ای نیز مستقل می‌باشند.

دیراک بمانند همهٔ تأثیرگذاران هم‌عصر خود در ابتدا متوجه زمختی و دشواری ریاضیات به خدمت گرفته شده توسط هایزنبرگ و دیگر همکاران او گردیده بود و پیش از همه درصدد برآمد تا با اتخاذ شیوه‌ای نو و دقیق، ضمن برطرف نمودن مشکلات و ناسازگاریها، راه را برای درک ویژگیها و زیباییهای موجود در مکانیک کوانتومی تا حد ممکن هموار نماید. وی به علت آشنایی و تسلط بر جبر غیرجابجایی و همینطور حساب ماتریسها، در مدت زمان کوتاهی توانست مطالب این مکانیک جدید و ریاضیات بکار رفته در آنرا، به شیوه‌ای نو و با بیانی ساختاری و نمادین (ساده و مختصر) و بسیار منسجم‌تر از خود هایزنبرگ و همین‌طور کارهای انجام شده توسط متأخرین، ارائه نماید. این شیوهٔ نمادین، آنچنان ساده و جامع زوایای پنهان مکانیک کوانتومی را آشکارا در معرض دید همگان قرار می‌دهد که حتی امروزه نیز هر فردی در مواجهه با قابلیتهای گستردهٔ آن دچار بهت و حیرت می‌شود.

۸–۱) فضای کت Ket Space

در مکانیک کوانتومی، یک حالت فیزیکی (یعنی یک حالت واقعی) را توسط یک بردار حالت *(state vector)* در یک فضای برداری مختلط نمایش می‌دهند. در تبعیت از دیراک *(Paul. A. M. Dirac)* ما این بردار را کِت *(Ket)* حالت نامیده و آنرا با نماد $|\alpha>$ نمایش می‌دهیم. بعنوان یک اصل موضوع فرض بر این است که این کت حالت *(state ket)* در برگیرندهٔ

تمامی (کل) اطلاعات مرتبط با آن حالت فیزیکی می‌باشد؛ درواقع هر آنچه از سیستم که ما مجاز به پرسش پیرامون آن باشیم، در داخل کت در برگرفته شده است.

هر دو کت حالتی می‌توانند با یکدیگر جمع شوند، بصورتیکه

$$|\alpha>+|\beta> \; = |\gamma> \qquad (۸-۱-۱)$$

که البته جمع ایندو یعنی $|\gamma>$ خود کت دیگری می‌باشد. اگر کت $|\alpha>$ را در یک عدد مختلط بمانند c ضرب نمائیم، حاصل ضرب بدست آمده، یعنی $c|\alpha>$ نیز خود یک کت می‌باشد. عدد مختلط c می‌تواند در سمت چپ و یا در سمت راست قرار گیرد و ایندو حالت از لحاظ مفهومی اختلافی ندارند،

$$c|\alpha> \; = \; |\alpha>c \qquad (۸-۱-۲)$$

در حالت خاصی که c برابر با صفر می‌باشد، کت حاصله را کت صفر (*null ket*) می‌نامند.

یکی دیگر از اصول موضوعهٔ مکانیک کوانتومی آن است که کتهای $|\alpha>$ و $c|\alpha>$ $(c \neq 0)$ حالت فیزیکی یکسانی را به نمایش می‌گذارند. به بیان دیگر، در فضای برداری مختلط مورد نظر ما تنها این راستا (*direction*) است که از اهمیت مفهومی برخوردار می‌باشد.

عملگرها *Operators*

یک مشاهده‌پذیر (*observable*)، همانند هر یک از مؤلفه‌های اندازه حرکت، می‌تواند از طریق یک عملگر (*operator*) بمانند A در فضای برداری مسئله مورد بررسی ما نمایش داده شود. بطور کلی یک عملگر تنها می‌تواند از سمت چپ بر یک کت عمل نماید به نحویکه

$$A(|\alpha>) \; = \; A|\alpha> \qquad (۸-۱-۳)$$

در حالت کلی $A|\alpha>$، ضرب سادهٔ یک ثابت در یک کت نبوده و این متفاوت از ضرب اعداد در کتها می‌باشد.

توجه داشته باشید که در حالت کلی نتیجهٔ بدست آمده از عمل عملگر A بر روی کت حالت کلی $|\alpha>$، کت دیگری بمانند $|\eta>$ می‌باشد، به بیان دقیق‌تر آنکه

$$A|\alpha> \; = \; |\eta> \qquad (۸-۱-۴)$$

اما همیشه کتهای حالت خاصی وجود دارند که از سادگی و البته اهمیت ویژه‌ای برای ما برخوردار می‌باشند، به نحویکه نتیجهٔ عمل عملگر بر روی این کتهای خاص به گونه‌ایست که خود کت اولیه (صرف‌نظر از یک ضریب) را مجدداً تولید می‌نماید، یعنی اینکه

$$A\,|a'> \;=\; a'\,|a'>$$
$$A\,|a''> \;=\; a''\,|a''>$$
$$\vdots \qquad (۵-۱-۸)$$

به این قبیل کتها، ویژه کت (*Eigenket*) اطلاق می‌گردد، البته مقـادیر a'، a''، ... نـه یـک عملگـر بلکه تنها مقادیری عددی می‌باشند. مجموعهٔ مقادیر عـددی $\{a',a'',...\}$ را مجموعـهٔ ویـژه مقـادیر (*Set of Eigenvalues*) عملگر A نامیده و گاهی نیز آنرا با نماد خلاصه‌تر $\{a'\}$ نمایش می‌دهند.

حالت فیزیکی متناظر با یک ویژه کت را یک ویژه حالت (*Eigenstate*) می‌نامند.

علی‌الاصول (بطور خیلی رسمی) ما با یک فضای برداری (مختلط) N بعدی درگیر هستیم که توسط N ویژه کت مشاهده‌پذیر A که معمولاً آنرا بصورت مجموعهٔ $\{|a'>\}$ نمایش می‌دهیم، پوشش داده شده و در آن یک کت دلخواه و کلی بمانند $|\alpha>$ را می‌توان از طریق این ویژه کتها بصورت ذیل بسط داد،

$$|\alpha> \;=\; \sum_{a'} C_{a'}\,|a'> \qquad (۶-۱-۸)$$

که در آن $C_{a'}$ ها یعنی ضرائب بسط، در حالت کلی مختلط می‌باشند.

ویژه حالتهای هم زمان دو مشاهده‌پذیر جابجا شونده (*compatible* ، هم‌سازگار) را بـا نمـاد $|a,b>$ نمـایش مـی‌دهـیم کـه ایـن برچـسب‌هـا (b,a) همـواره مقـدار عـددی ویـژه مقـادیر و البتـه تعـداد مشاهده‌پذیرهای دستگاه را به نمایش می‌گذارنـد. در آینـده ارتبـاط بـین بـردار انتزاعـی (*abstract*) $|\psi>$ و تابع موج $\psi(x)$ را نیز بدست خواهیم آورد.

فضای برا و ضرب داخلی — *Bra Space and Inner Prodcut*

فضای برداری مختلطی که تاکنون به مطالعهٔ آن پرداخته‌ایم، فضای کت می‌باشد. حال قصد داریـم بـه معرفی ایدهٔ فضای بِرا (*Bra space*) بپردازیم، فضائی برداری و مختلط که همزاد (*dual to* ، نیمـه دیگر، نمود دیگر) فضای کت می‌باشد.

به عنوان یک اصل موضوع، فرض را بر این می‌گذاریم که متناظر با هر کـت بماننـد $|\alpha>$، یـک بـرا وجود دارد که با نماد $<\alpha|$ در نمود دیگر فضای کت، یعنی فضای برا آنرا نمایش می‌دهیم. فضای بـرا به توسط مجموعهٔ ویژه براها (*Eigenbras*) یعنی $\{<a'|\;,\;<a''|\;,\;...\}$ پوشـش داده مـی‌شـود که متناظر با مجموعهٔ ویژه کتها $\{|a'>\;,\;|a''>\;,\;...\}$ می‌باشند. درواقع یک تناظر یـک بـه یـک

بین فضای کت و فضای برا وجود دارد به نحویکه

$$|\alpha> \;\leftrightarrow\; <\alpha|$$

$$|a'> \;,\; |a''> \;,... \leftrightarrow\; <a'| \;,\; <a''| \;,...$$

$$|\alpha>+|\beta> \;\leftrightarrow\; <\alpha|+<\beta| \qquad (۸-۱-۷)$$

به بیانی نه چندان دقیق، می‌توان فضای برا را نوعی تصویر آئینه‌ای از فضای کت در نظر گرفت.

به عنوان یک اصل موضوع، همزاد $c\,|\alpha>$ را بصورت $c^*<\alpha|$ در نظر می‌گیریم (نـه $c<\alpha|$) کـه نکته‌ای مهم بوده و باید به آن توجه ویژه گردد، به نحویکه در حالت کلی شاهد آن هستیم که

$$c_\alpha|\alpha> \;+\; c_\beta|\beta> \;\leftrightarrow\; c_\alpha^*<\alpha| \;+\; c_\beta^*<\beta| \qquad (۸-۱-۸)$$

حال قصد داریم به معرفی ضرب نقطه‌ای یک برا و یک کت بپردازیم. همـانطور کـه بیـاد داریـد ویـژه حالتهای ذره در چاه پتانسیل با دیواره‌های بی‌نهایت، به ازاء مقادیر مختلف متعامد بودند، یعنی اینکه

$$\int u_m^*(x)\,u_n(x)dx = \delta_{mn} \qquad (۸-۱-۹)$$

چگونه می‌توان این رابطه را برحسب براها و کتها نمایش داد؟

حاصل ضرب نقطه‌ای یک برا در یک کت را با نماد خلاصه شدهٔ $<m|n>$ (بخوانید برا ـ کت) تعریف خواهیم نمود. بطور کلی، حاصل ضرب نقطه‌ای یک بـرا بماننـد $<\phi|$ در یـک کـت بماننـد $|\psi>$، از لحاظ عددی همان رابطه‌ای است که پیش‌تر برای ضرب نرده‌ای تعریف نموده‌ایم و آن عبارتست از

$$<\phi|\psi> \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*(x)\;\psi(x)\;dx \qquad (۸-۱-۱۰)$$

همچنین باید توجه داشته باشیم که

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\phi^*(x)\psi(x)\right)^*dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\phi(x)\;dx \qquad (۸-۱-۱۱)$$

یا اینکه

$$<\phi|\psi>^* \;=\; <\psi|\phi> \qquad (۸-۱-۱۲)$$

از این رابطه می‌توان استفاده نمود و نشان داد که

$$<\phi|\phi> \qquad (۸-۱-۱۳)$$

همواره یک عدد حقیقی است چرا که

$$<\phi|\phi>^* \;=\; <\phi|\phi> \qquad (۸-۱-۱۴)$$

همچنین به عنوان یک اصل موضوع می‌پذیریم که

$$<\phi|\phi> \;\geq\; 0 \quad \text{و} \quad (<\alpha|\alpha> \;\geq 0) \qquad (۸-۱-۱۵)$$

به این مطلب **اصل موضوع متریک مثبـت** *(postulate of positive definite metric)* اطـلاق

می‌گردد (البته توجه داشته باشید که حالت تساوی $<\phi|\phi> \; = \; 0$ مربوط به کت صفر *(null ket)* می‌باشد که حالتی بدیهی بوده و فاقد هرگونه ارزش فیزیکی است. از همین روی اصل موضوع متریک مثبت و نه متریک غیرمنفی (≥ 0) نامیده می‌شود). همچنین می‌دانیم که

$$<\phi|\alpha\psi_1+\beta\psi_2> \; = \; \alpha<\phi|\psi_1>+\beta<\phi|\psi_2> \qquad (۸-۱-۱۶)$$

و

$$<\phi|\alpha\psi_1+\beta\psi_2>^* = \alpha^*<\psi_1|\phi>+\beta^*<\psi_2|\phi> \qquad (۸-۱-۱۷)$$

و اما برای بهنجار نمودن یک کت بمانند $|\alpha>$ کافی است بنویسیم که

$$|\tilde{\alpha}> \; = \frac{1}{\sqrt{<\alpha|\alpha>}}|\alpha> \quad \text{و} \quad (|\alpha> \; \neq \; 0 \; \text{اگر}) \qquad (۸-۱-۱۸)$$

زیرا همانطور که مشاهده می‌کنید $<\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}> \; = \; 1$ می‌باشد.

به مقدار $\sqrt{<\alpha|\alpha>}$ نُرم یا اندازۀ $(norm)$ کت (کلی و دلخواه) $|\alpha>$ گفته می‌شود.

در حالت کلی هرگاه عملگری بر حالتی عمل نماید، حالت دیگری را بدست می‌دهد. بـه زبـان دیـراک، هرگاه عملگری بر یک کت عمل نماید، کت دیگری را بدست می‌دهد که مـی‌تـوان دو شـکل ذیـل را برای عمل آن در نظر گرفت،

$$A|\psi> \; = \; |A \;\; \psi> \qquad (۸-۱-۱۹)$$

سمت چپ این رابطه عملگری را نشان می‌دهد که بر یک کـت عمـل مـی‌نمایـد و سـمت راسـت آن نمایشگر کت حاصل است. همچنین می‌توان نوشت

$$<\phi|A\psi> \; = \; <\phi|A|\psi> \qquad (۸-۱-۲۰)$$

با توجه به رابطۀ (۸-۱-۱۰) متوجه می‌شویم که

$$<\phi|A|\psi> \; = \; <\phi|A\psi> \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*(x)A\psi(x)dx \qquad (۸-۱-۲۱)$$

همانطور که به یاد دارید، مزدوج هرمیتی (الحاقی) عملگر A را با $A^\dagger$ نمایش داده و آنرا چنـان تعریـف می‌کردیم که

$$\int\psi(x)\big(A\phi(x)\big)^*dx = \int\big(A\phi(x)\big)^*\psi(x)dx = \int\phi^*(x)A^\dagger\psi(x)dx \qquad (۸-۱-۲۲)$$

که به زبان نمادهای دیراک عبارت خواهد بود از

$$<A\phi|\psi> \; = \; <\phi|A^\dagger|\psi> \qquad (۸-۱-۲۳)$$

به همین نحو می‌توان استدلال نمود که

$$<\phi|A^\dagger|\psi>^* = \; <A\phi|\psi>^* = \; <\psi|A\phi> \; = \; <\psi|A|\phi> \qquad (۸-۱-۲۴)$$

حال قصد داریم که قضیهٔ بسط را در فضای برداری بررسی نمائیم. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، هر تابع موج دلخواهی را می‌توان برحسب مجموعهٔ کامل ویژه توابع عملگرهای هرمیتی بسط داد. قصد داریم کت دلخواه $|\psi>$ را برحسب **مجموعهٔ کامل ویژه حالتهای متعامدی** بمانند $|n>$ها بسط دهیم،

$$|\psi> \;=\; \sum_n C_n\,|n> \qquad (۸-۱-۲۵)$$

از شرط متعامد بودن ویژه حالتها یعنی

$$<m\,|\,n> \;=\; \delta_{mn} \qquad (۸-۱-۲۶)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} <m\,|\,\psi> &= \sum_n C_n <m\,|\,n> \\ &= \sum_n C_n \delta_{mn} = C_m \end{aligned}$$

$$\therefore \Rightarrow C_m = \;<m\,|\,\psi> \qquad (۸-۱-۲۷)$$

یا اینکه

$$C_n = \;<n\,|\,\psi> \qquad (۸-۱-۲۸)$$

حال اگر رابطه بدست آمده را در (۸-۱-۲۵) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |\psi> &= \sum_n <n\,|\,\psi>\;\;|\,n> \\ &= \sum_n |\,n><n\,|\,\psi> \end{aligned} \qquad (۸-۱-۲۹)$$

در این مرحله، اشاره به چند نکتهٔ مهم ضروری است:

باید توجه داشته باشیم که حاصل ضرب نقطه‌ای $<\alpha\,|\,\beta>$ نه یک عملگر، بلکه تنها یک عدد بوده و از همین روی به راحتی می‌تواند جابجا گردد. اما حاصل‌ضرب پدیدار شدهٔ $|\,\alpha><\beta\,|$ (و در اینجا $|\,n><n\,|$) که به آن ضرب خارجی (*outer product*) گفته می‌شود، یک عملگر بوده و می‌تواند از چپ و یا راست عمل نماید.

در حالتهای قبلی شاهد بودیم که یک عملگر بمانند A می‌تواند از چپ بر روی یک کت ($A\,|\,\psi>$) و یا از راست بر روی یک برا ($<\phi\,|\,A$) عمل نماید، اما باید این نکته را نیز در نظر داشت که صحت این مطالب منوط به مجاز بودن آرایش شکل گرفته می‌باشد. بطور مثال حالتهای $|\psi>A \;\;,\;\; A<\phi|$ نمونه‌هائی از حالتهای غیرمجاز می‌باشند. اینها در حقیقت نه یک کت، نه یک برا، و نه حتی یک عملگر می‌باشند. اگر کتهای $|\psi> \;,\; |\phi>$ متعلق به یک فضای کت (یا براساس

$|\psi>$ و $|\phi>$ متعلق به یک فضای برا) باشند آنگاه حالتهائی بمانند $<\psi|<\phi|$ یا $<\phi|\,|\psi><\phi|$ (و یا $|\psi>|\phi><\phi|$ و $<\phi|\,|\psi><\psi|$) نیز غیرمجاز می‌باشند.

از آنجائیکه رابطهٔ (۸-۱-۲۹) باید به ازاء هر کتی $(|\psi>)$، بسط داده شده برحسب مجموعهٔ کامل ویژه حالتهای عملگر هرمیتی، برقرار باشد از همین روی می‌توان نتیجه گرفت که

$$|\psi> \;=\; \sum_n |n><n|\psi> \;=\; \left(\sum_n |n><n|\right)|\psi>$$

$$\therefore\Rightarrow\;\sum_n |n><n| \;=I \qquad (۸\text{-}۱\text{-}۳۰)$$

که در آن I عملگر یکّه یا واحد *(identity or unit operator)* بوده و دارای این خاصیت است که اگر بر حالتی عمل نماید، آن حالت را تغییر نمی‌دهد (یا به عبارتی بی‌هیچ تغییری مجدداً آنرا ایجاد می‌نماید). به رابطهٔ (۸-۱-۳۰) رابطهٔ کامل بودن (*completeness relation*) یا بسته بودن (*closure*) اطلاق می‌شود.

این رابطه دارای فواید بسیاری بوده، به نحویکه در یک زنجیرهٔ مجاز از حاصل ضرب کت‌ها، براها و عملگرها، و در هر کجای آن که نیاز داشته باشیم می‌توانیم این عملگر یکّه را وارد نمائیم. به طور مثال مورد $<\psi|\psi>$ را در نظر بگیرید؛ با وارد کردن عملگر یکّه بین برا $<\psi|$ و کت $|\psi>$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}<\psi|\psi> \;&=\; <\psi|\left(\sum_n |n><n|\right)|\psi>\\
&=\;\sum_n <\psi|n><n|\psi>\\
&=\sum_n <n|\psi>^*<n|\psi>\\
&=\sum_n |\;<n|\psi>\;|^2 \qquad (۸\text{-}۱\text{-}۳۱)\end{aligned}$$

اگر $|\psi>$ خود بهنجار باشد، در آن صورت ضرائب بسط می‌توانند رابطهٔ ذیل را برآورده سازند،

$$\sum_n |C_n|^2=\sum_n |<n|\psi>|^2=1 \qquad (۸\text{-}۱\text{-}۳۲)$$

همانطور که پیش‌تر نیز اشاره شد، ترکیب $|n><n|$ یک عملگر می‌باشد. اجازه دهید حاصل عمل آن بر روی کت $|\psi>$ را بررسی نمائیم،

$$\begin{aligned}&\left(|n><n|\right)|\psi>\\
&=\;|n><n|\psi>\\
&=C_n|n> \qquad (۸\text{-}۱\text{-}۳۳)\end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید عملگر $|n><n|$ آن بخشی از کت $|\psi>$ را بر می‌گزینند که هم راستا (موازی) با کت $|n>$ باشد، از همین روی عملگر $|n><n|$ به عنوان عملگر تصویر (*projection operator*) در امتداد $|n>$ شناخته شده و گاهی نیز با نماد

$$\Lambda_n = |n><n| \qquad (۸-۱-۳۴)$$

نمایش داده می‌شود. در این صورت رابطۀ کامل بودن یا همان بسته بودن بصورت ذیل بازنویسی می‌شود،

$$\sum_n \Lambda_n = \sum_n |n><n| = I \qquad (۸-۱-۳۵)$$

اما شاید هنوز این رابطه از دیدگاه انتگرالی (نمادهای انتگرالی پیشین) کمی برای شما غیرقابل درک باشد. برای درک بهتر عملگر یکّه، می‌توان آنرا بصورت مفهومی‌تری نیز بیان داشت. اگر ابتدا توجه خود را به حالتهای گسسته معطوف نمائیم، خواهیم داشت

$$\psi(x) = \sum_n C_n u_n(x) \qquad (۸-۱-۳۶)$$

یا اینکه

$$|\psi> = \sum_n C_n |n> \qquad (۸-۱-۳۷)$$

که البته منوط به کامل بودن ویژه توابع $u_n(x)$ می‌باشد. با عمل دادن $<m|$ بر هر دو طرف این رابطه از سمت چپ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |\psi> &= \sum_n C_n |n> \\ <m|\psi> &= \sum_n C_n <m|n> \\ &= \sum_n C_n \delta_{mn} \\ &= C_m \end{aligned}$$

$$\therefore \Rightarrow \ <n|\psi> = C_n \qquad (۸-۱-۳۸)$$

که به زبان انتگرالی عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} C_n &= <n|\psi> \\ &= \int u_n^*(x)\ \psi(x) dx \end{aligned} \qquad (۸-۱-۳۹)$$

حال با جایگذاری این رابطه در عبارت اصلی تابع موج خواهیم داشت

$$\psi(x) = \sum_n C_n u_n(x)$$

$$= \sum_n \left(\int u_n^*(x')\psi(x')dx' \right) u_n(x) \qquad (۸-۱-۴۰)$$

که با کمی عملیات ریاضی نتیجه می‌دهد

$$\psi(x) = \int \left(\sum_n u_n^*(x')\, u_n(x) \right) \psi(x')dx'$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید عبارت داخل پرانتز درواقع یک تابع دلتای دیراک می‌باشد، یعنی اینکه

$$\psi(x) = \int \left(\sum_n u_n^*(x')\, u_n(x) \right) \psi(x')dx' = \int \delta(x'-x)\psi(x')dx' \qquad (۸-۱-۴۱)$$

و بنابراین خواهیم داشت

$$\sum_n u_n^*(x')\, u_n(x) = \delta(x'-x) \qquad (۸-۱-۴۲)$$

رابطۀ فوق، همان رابطۀ کامل بودن یا بسته بودن (*closure*) است که البته صحت آن به کامل بودن مجموعۀ ویژه توابع $u_n(x)$ بستگی دارد.

بطور مثال می‌توان از این رابطه در ضرب نقطه‌ای دو تابع موج استفاده نمود،

$$\begin{aligned}
<\phi|\psi> &= \int \phi^*(x)\ \psi(x)dx \\
&= \int \phi^*(x)\left(\int \delta(x'-x)\psi(x')dx' \right)dx \\
&= \iint \phi^*(x)\ \delta(x'-x)\psi(x')\ dxdx' \\
&= \iint \phi^*(x)\left(\sum_n u_n^*(x')\, u_n(x) \right)\psi(x')dxdx' \\
&= \sum_n \int \phi^*(x)\, u_n(x)dx \int u_n^*(x')\psi(x')dx' \\
&= \sum_n <\phi|n><n|\psi> \\
&= <\phi|\left(\sum_n |n><n| \right)|\psi>
\end{aligned} \qquad (۸-۱-۴۳)$$

همانطور که مشاهده می‌کنید در سیستم نمادگذاری دیراک، رابطۀ کامل بودن یا بسته بودن را می‌توان به شکل فشردۀ ذیل بازنویسی نمود

$$\sum_n |n><n| = I \qquad (۸-۱-۳۵)$$

که البته I همان عملگر یکه است.

تمرین (۸-۱)

نشان دهید که ویژه کتهای هر عملگر هرمیتی که متناظر با ویژه مقادیر متفاوتی می‌باشند، بر هم عمودند.

فرض کنید

$$\begin{cases} A\,|a> \;=\; a\,|a> \\ A\,|b> \;= b\,|b> \end{cases} \qquad (۸-۱-۴۴)$$

که با توجه به هرمیتی بودن A، ویژه مقادیر a و b باید حقیقی باشند. با ضرب اولین معادله در برا $|b>$ و دومین معادله در برا $|a>$ خواهیم داشت

$$\begin{cases} <b\,|A\,|a> \;=\; a<b\,|a> \\ <a\,|A\,|b> \;=\; b<a\,|b> \end{cases} \qquad (۸-۱-۴۵)$$

حال با نوشتن مزدوج مختلط رابطهٔ دوم نتیجه می‌گیریم که

$$<a\,|A\,|b>^* \;=\; <a\,|Ab>^* = \;<Ab\,|a> \;=\; b^*<b\,|a> \;=\; b<b\,|a>$$

$$\therefore \;\Rightarrow\; <Ab\,|a> \;=\; b<b\,|a> \qquad (۸-۱-۴۶)$$

از طرف دیگر با توجه به هرمیتی بودن A، یعنی اینکه $A = A^\dagger$ می‌دانیم که

$$<Ab\,|a> \;=\; <b\,|A^\dagger\,|a> \;=\; <b\,|A\,|a> \;=\; a<b\,|a> \qquad (۸-۱-۴۷)$$

که با تفاضل این دو رابطه از یکدیگر خواهیم داشت

$$(a-b)<b\,|a> \;=\; 0 \qquad (۸-۱-۴۸)$$

بنابراین اگر $a \neq b$ باشد، آنگاه تنها می‌توانیم داشته باشیم

$$\text{اگر } a \neq b \;\Rightarrow\; <b\,|a> \;=\; 0 \qquad (۸-۱-۴۹)$$

حال به قضیهٔ بسط باز می‌گردیم. تعبیر ضرائب بسط C_n این می‌باشد که $|C_n|^2$ برابر با احتمال این مسئله است که اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر A، بر روی ویژه کتهای $|n>$، ویژه مقدار n را نتیجه دهد. توجه داشته باشیم که مجموعهٔ $|n>$ ها لزوماً گسسته نمی‌باشند و متغیرهایی که با n برچسب می‌خورند حتی می‌توانند پیوسته نیز باشند. بطور مثال اگر مکان حالتی را که با $|\psi>$ مشخص شده است، اندازه‌گیری نمائیم، احتمال اینکه مقدار x بدست آید چقدر است؟

مکان را که یکی از مشاهده‌پذیرهاست، با عملگر هرمیتی X $(X = X_{op})$ نمایش می‌دهیم. این مشاهده‌پذیر مجموعهٔ کاملی از ویژه کتها را خواهد داشت که ویژه مقادیرشان اعداد x می‌باشند. معادله ویژه مقداری این عملگر عبارت خواهد بود از

$$X\,|x> \;=\; x\,|x> \qquad (۸-۱-۵۰)$$

هرچند که شکل دقیق عملگر X را نمی‌دانیم، با اینحال با توجه به قضیهٔ بسط خواهیم داشت

$$|\psi> \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} C(x)\,|x>dx \qquad (۸-۱-۵۱)$$

در این مرحله با توجه به پیوسته بودن x، انتگرال را جایگزین سیگما نموده‌ایم. با استفاده از متعامد