

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه تربیت مدرس

شرحی بر مکانیک کوانتومی

(جلد دوم)

ندا حجاری

ابوالفضل فرداد

| | |
|----------------------|---------------------------------------------------------------|
| سر شناسنامه | : فرداد، ابوالفضل، ۱۳۵۰- |
| عنوان و نام پدید آور | : شرحی بر مکانیک کوانتومی (جلد اول) ابوالفضل فرداد- ندا حجاری |
| مشخصات نشر | : تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، ۱۳۸۷، |
| مشخصات ظاهری | : ۲ ج: مصور، جدول، نمودار. |
| شابک | : ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۱۹-۱: ۲: ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۱۸-۴، ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۲۰-۷، |
| وضعیت فهرست نویسی | : فیبا |
| یادداشت | : کوانتم- راهنمای آموزشی(عالی) |
| موضوع | : کوانتم - مسائل، تمرین ها و غیره (عالی) |
| موضوع | : کوانتم- آزمون ها و تمرین ها (عالی). |
| شناسه افزوده | : حجازی، ندا، ۱۳۵۱. |
| شناسه افزوده | : دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی. |
| رده بندی کنگره | : ۱۳۸۷ ۴ش ۴ ف ۱۷۴/۱۴ QC |
| رده بندی دیویی | : ۵۳۰/۱۲۰۷ |
| شماره کتابشناسی ملی | : ۱۵۳۷۴۰۲ |



سازمان اسناد و کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

| | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| عنوان | : شرحی بر مکانیک کوانتومی (جلد دوم) |
| تألیف | : ابوالفضل فرداد- ندا حجاری |
| انتشارات | : دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی |
| چاپ اول | : زمستان ۱۳۸۷ |
| حروف نگاری | : طرح و نشر هامون (فاطمه نظری) |
| طراح جلد | : حسین مجلسی |
| رسم شکل ها | : محمد هادی مجلسی |
| لبتوگرافی | : یاس |
| چاپ | : عمران |
| شمارگان | : ۱۰۰۰ جلد |
| قیمت دوره ۲ جلدی | : ۱۶۰۰۰ تومان |
| شابک(جلد اول) | : ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۱۹-۱ |
| شابک(دوره) | : ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۲۰-۷ |
| ISBN: 978-964-2651-19-1(VoI.1) | |
| ISBN:978-964-2651-20-7(2VoI.Set) | |

کلیه حقوق این اثر برای مؤلفین و مترجمین و دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی محفوظ است.
 نشانی: تهران، لویزان - کد پستی ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸ - صندوق پستی ۱۶۳ - ۱۶۷۸۵ - تلفن: (۲۶۳۲) ۹ - ۰۶۰، ۰۲۲۹۷۰۰۷۰، ۰۲۲۹۷۰۰۷۰. نمابر:
 ۰۲۲۹۷۰۰۰۳، پست الکترونیکی: Publish@srutu.edu، وب سایت: http://Publish.srutu.edu

تقدیم بہ ہمہ آہنائیکہ دوستستان داریم

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل ۱: سرچشمهٔ پیدایش نظریهٔ مکانیک کوانتومی، تابش جسم سیاه

| | |
|------|----------------------------------------------------------------|
| ۱-۳ | تابش اجسام گرم |
| ۱-۶ | جسم سیاه |
| ۱-۷ | قانون کرشهف |
| ۱-۱۰ | نکات تاریخی |
| ۱-۱۳ | مثال‌هایی در اجسام سیاه |
| ۱-۱۴ | (۳-۱) قانون استفان - بولتزمن |
| ۱-۱۵ | نکات تاریخی |
| ۱-۱۶ | فشار تابشی |
| ۱-۱۹ | نکات تاریخی |
| ۱-۲۳ | (۴-۱) قانون جابجائی وین |
| ۱-۲۸ | نکات تاریخی |
| ۱-۳۲ | (۵-۱) اندازه‌گیری توزیع طیفی تابش‌های جسم سیاه |
| ۱-۳۴ | نکات تاریخی |
| ۱-۴۰ | (۶-۱) نظریهٔ کلاسیکی تابش کاواک، فاجعهٔ فرابنفش |
| ۱-۵۰ | نکات تاریخی |
| ۱-۵۴ | نکات تاریخی |
| ۱-۵۶ | (۷-۱) بینش شگفت‌انگیز پلانک |
| ۱-۶۵ | نکات تاریخی |
| ۱-۶۷ | پیرامون قانون دوم نظریه مکانیک حرارت |
| ۱-۷۲ | (۸-۱) تابش جسم سیاه مربوط به پرتوهای کیهانی در دمای $3K$ |
| ۱-۷۴ | تاریخچهٔ کشف تابش زمینهٔ میکروموجی کیهانی |
| ۱-۷۶ | مأموریت ماهوارهٔ کوبه |

عنوان صفحه

فصل ۲: دوگانگی موج - ذره‌ای

| | |
|------|------------------------------------------------|
| ۲-۳ | مفاهیم کلاسیک ذره و موج |
| ۲-۴ | رفتار ذره‌گونه تابش الکترومغناطیسی |
| ۲-۵ | اثر فوتوالکتریک |
| ۲-۷ | اثر کامپتون |
| ۲-۱۳ | رفتار موج‌گونه ذرات |
| ۲-۱۴ | فرضیه دوبروی |
| ۲-۱۷ | نکات تاریخی |
| ۲-۲۳ | آزمایش دیویسون - گرمر |
| ۲-۲۸ | آزمایش دوشکافی ذرات |
| ۲-۳۳ | پراش مولکولهای بزرگ و سنگین از توری پراش |
| ۲-۳۶ | اثر کاپیتزا - دیراک |
| ۲-۴۲ | تعبیر امواج مادی توسط نظریه احتمال |
| ۲-۴۵ | تعبیر ماکس بورن از امواج مادی |
| ۲-۵۰ | نکات تاریخی |
| ۲-۵۵ | اصل برهم‌نهی برای توابع موج |
| ۲-۵۸ | تأثیر اندازه‌گیری بر رفتار ذرات |
| ۲-۶۲ | آیا فوتون واقعاً وجود دارد؟ |

فصل ۳: تک‌موج‌ها و بسته‌موج

| | |
|-----|------------------------------|
| ۳-۳ | برهم‌نهی امواج سینوسی |
| ۳-۳ | اختلاف در فازهای اولیه |

| عنوان | صفحه |
|-----------------------------------------|------|
| اختلاف راه | ۳-۴ |
| اختلاف زمانی | ۳-۵ |
| اختلاف در فاز، راه و زمان | ۳-۷ |
| اختلاف در فرکانس و عدد موج | ۳-۸ |
| پدیدهٔ زنش | ۳-۹ |
| توصیف‌های ذره‌ای و موجی در فیزیک کلاسیک | ۳-۱۲ |
| بسته موج‌ها از دیدگاه کاملاً کلاسیکی | ۳-۱۶ |
| مدهای انتقال انرژی و برهم‌کنش‌ها | ۳-۲۵ |
| سرعت‌های فاز و گروه | ۳-۶ |
| قضیهٔ پهنای باند | ۳-۳۲ |
| بسته موج و خواص ذره‌ای | ۳-۴۵ |

فصل ۴ : معادلهٔ شرودینگر

| | |
|--------------------------------------------|------|
| موجهای تخت و بسته موجها | ۴-۳ |
| حرکت بسته‌های موج | ۴-۹ |
| تبدیل فوریه | ۴-۱۲ |
| قضیهٔ انتگرال فوریه | ۴-۱۷ |
| فرمول پارسوال | ۴-۱۸ |
| معادلهٔ شرودینگر | ۴-۱۹ |
| از معادلهٔ شرودینگر چه انتظاراتی داریم؟ | ۴-۲۳ |
| نکات تاریخی | ۴-۲۸ |
| شرایط مورد نیاز برای یک تابع موج قابل قبول | ۴-۳۱ |
| معادلهٔ شرودینگر در سه بعد | ۴-۳۲ |
| عملگر هامیلتونی | ۴-۳۵ |

| صفحه | عنوان |
|------|------------------------------------|
| ۴-۳۸ | تابع موج و تبدیل فوریه در حالت کلی |
| ۴-۴۱ | تابع دلتای دیراک در سه بعد |
| ۴-۴۲ | ۴-۶ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ |
| ۴-۴۳ | تعریف عدم قطعیت |
| ۴-۴۹ | حد کلاسیکی |
| ۴-۵۰ | کمیت‌های خوش تعریف |
| ۴-۵۰ | عدم قطعیت انرژی - زمان |
| ۴-۵۲ | ۴-۷ تعابیر احتمالاتی و بقای احتمال |
| ۴-۵۹ | جریان چگالی احتمال یا جریان احتمال |
| ۴-۶۱ | تعبیر فیزیکی |
| ۴-۶۳ | ۴-۸ مقادیر چشمداشتی |
| ۴-۷۰ | ۴-۹ تابع موج در فضای اندازه حرکت |
| ۴-۷۴ | عملگر x_{op} در فضای اندازه حرکت |
| ۴-۸۲ | عملگر انرژی و مقدار چشمداشتی آن |
| ۴-۸۵ | عملگر زمان |
| ۴-۸۷ | ۴-۱۰ ترکیب عملگرها و روابط جابجایی |
| ۴-۹۰ | اتحادهای جبری جابجایی‌ها |

فصل ۵: معادلات ویژه مقداری، قضیه بسط و عملگر پاریته

| | |
|------|-------------------------|
| ۵-۳ | ۵-۱ جداسازی متغیرها |
| ۵-۷ | ۵-۲ معادلات ویژه مقداری |
| ۵-۹ | اندازه حرکت |
| ۵-۹ | انرژی |
| ۵-۱۰ | مکان |

| عنوان | صفحه |
|----------------------------------------------------------------|------|
| ۳-۵) حالت‌های مقید در مکانیک کوانتومی | ۵-۱۹ |
| پتانسیل با دیواره‌های بی‌نهایت | ۵-۲۰ |
| ناحیه I، $0 < x < L$ | ۵-۲۴ |
| ناحیه II، $x < 0$ | ۵-۲۵ |
| ناحیه III، $x > L$ | ۵-۲۶ |
| چاه پتانسیل با دیواره‌های بی‌نهایت | ۵-۲۷ |
| پیوستگی در تمامی نواحی فضا | ۵-۲۹ |
| توابع متعامد | ۵-۳۷ |
| ۴-۵) قضیه بسط و تعبیر فیزیکی آن | ۵-۴۷ |
| تعبیر فیزیکی ضرائب بسط | ۵-۵۰ |
| جواب‌های کلی معادله شرودینگر وابسته به زمان در حالت $V = V(x)$ | ۵-۵۳ |
| ۵-۵) ویژه توابع اندازه حرکت و ذره آزاد | ۵-۵۶ |
| ذره آزاد و مسئله بهنجارشدن آن | ۵-۵۸ |
| تبهگنی | ۵-۶۸ |
| ۶-۵) عملگر پاریتته | ۵-۶۹ |
| نکات تاریخی | ۵-۷۶ |

فصل ۶: پتانسیل‌های ساده یک‌بعدی

| | |
|----------------------------------------------|------|
| ۱-۶) پله پتانسیل | ۶-۴ |
| پله پتانسیل حالت $E > V_0$ | ۶-۶ |
| شرایط مرزی | ۶-۱۰ |
| پله پتانسیل حالت $E < V_0$ | ۶-۲۲ |
| ۲-۶) سد پتانسیل مربعی (مقارن) حالت $E > V_0$ | ۶-۳۳ |
| عبور تشدید یافته | ۶-۳۸ |

| صفحه | عنوان |
|------|---------------------------------------------|
| ۶-۴۱ | سد پتانسیل مربعی، حالت $E < V_0$ |
| ۶-۴۸ | پدیده تونل زنی |
| ۶-۵۶ | واپاشی آلفائی |
| ۶-۵۸ | وارون شدگی آمونیاک و ساعت اتمی |
| ۶-۶۱ | چاه پتانسیل |
| ۶-۶۱ | چاه پتانسیل مربعی حالت $E > 0$ |
| ۶-۶۷ | چاه پتانسیل مربعی حالت $E < 0$ |
| ۶-۷۰ | حالت $A=0$ ، جواب‌هائی با پاریتته فرد |
| ۶-۷۱ | حالت $B=0$ ، جواب‌هائی با پاریتته زوج |
| ۶-۸۰ | نوسانگر هارمونیک خطی |
| ۶-۹۱ | انرژی حالت پایه و صفر مطلق |

فصل ۷: فرمولبندی مکانیک کوانتومی، روش‌های عملگری I

| | |
|------|-------------------------------------------------|
| ۷-۳ | فضاهای برداری و عملگرها |
| ۷-۶ | حالت‌های تبهگن |
| ۷-۷ | عملگرهای یکانی و عملگرهای وارون |
| ۷-۹ | مشاهده‌پذیرهای هم‌زمان |
| ۷-۹ | مشاهده‌پذیرهای فیزیکی |
| ۷-۱۰ | مشاهده‌پذیرهای هم‌سازگار |
| ۷-۲۱ | عملگرهای غیرجابجا شونده و روابط عدم قطعیت |
| ۷-۲۴ | بستگی زمانی و حد کلاسیکی |
| ۷-۲۶ | بقای انرژی |
| ۷-۲۷ | بقای اندازه حرکت |
| ۷-۲۷ | قضیه ارنفست، حد کلاسیکی |
| ۷-۳۱ | نکات تاریخی |

فصل ۸: فرمولبندی مکانیک کوانتومی، روش‌های عملگری II

| | | |
|------|-------------------------------------------|------|
| ۸-۳ | فضای کت | ۸-۳ |
| ۸-۴ | عملگرها | ۸-۴ |
| ۸-۵ | فضای برا و ضرب داخلی | ۸-۵ |
| ۸-۱۵ | عملگرهای تصویر (تصویرگر) | ۸-۱۵ |
| ۸-۱۸ | طیف انرژی نوسانگر هارمونیک ساده | ۸-۱۸ |
| ۸-۲۸ | رسیدن از عملگرها به معادله شرودینگر | ۸-۲۸ |
| ۸-۳۳ | تغییر پایه‌های فضا و عملگر تبدیل | ۸-۳۳ |
| ۸-۳۵ | تبدیل یکانی | ۸-۳۵ |
| ۸-۴۵ | تبدیلات یکانی بی‌نهایت کوچک | ۸-۴۵ |
| ۸-۴۷ | عملگر تحول زمانی | ۸-۴۷ |
| ۸-۵۱ | قضیه ویریا | ۸-۵۱ |
| ۸-۵۷ | تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ | ۸-۵۷ |
| ۸-۶۹ | نکات تاریخی | ۸-۶۹ |
| ۸-۷۱ | نوسانگر هارمونیک ساده | ۸-۷۱ |
| ۸-۷۱ | تصاویر شرودینگر و هایزنبرگ | ۸-۷۱ |
| ۸-۸۲ | نکات تاریخی | ۸-۸۲ |

فصل ۹: اندازه حرکت زاویه‌ای مداری

| | | |
|------|-------------------------------------------------------|------|
| ۹-۳ | اندازه حرکت زاویه‌ای مداری، روابط جابجائی | ۹-۳ |
| ۹-۸ | اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی | ۹-۸ |
| ۹-۱۶ | اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و دوران‌های فضایی | ۹-۱۶ |
| ۹-۲۴ | ویژه مقادیر و ویژه توابع عملگرهای L^2 و L_z | ۹-۲۴ |
| ۹-۲۷ | ویژه توابع هم‌زمان L^2 و L_z | ۹-۲۷ |

| صفحه | عنوان |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۹-۲۹ | حالت خاص $m = 0$ |
| ۹-۳۵ | فرمول رودریگز |
| ۹-۴۱ | چند جمله‌ایهای لژاندر در حالت کلی |
| ۹-۴۷ | هماهنگهای کروی |
| ۹-۵۱ | عملگر پارینه و هماهنگهای کروی |
| ۹-۵۶ | ۴-۹ اثر عملگرهای \mathcal{L}_x و \mathcal{L}_y بر روی $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ |
| ۹-۷۰ | حالت $m = 0$ |
| ۹-۷۲ | حالت $l = 0$ |
| ۹-۷۳ | ۵-۹ ذره‌ای واقع بر سطح کره |
| ۹-۷۴ | دوران‌کننده صلب |
| ۹-۷۵ | ترازهای انرژی دورانی یک مولکول دواتمی |
| ۹-۷۸ | نکات تاریخی |

فصل ۱۰: حل معادله شرودینگر در سه بعد (حالت‌های مانا) و اتم هیدروژن (مدل غیرنسبیتی)

| | |
|-------|-------------------------------------------------------------|
| ۱۰-۴ | ۱-۱۰ معادله شرودینگر برای یک سیستم دو جسمی؛ حرکت نسبی |
| ۱۰-۸ | ۲-۱۰ جداسازی معادله شرودینگر در دستگاه مختصات دکارتی |
| ۱۰-۱۰ | ذره آزاد (در سه بعد) |
| ۱۰-۱۳ | بهنجارش |
| ۱۰-۱۴ | جعبه سه بعدی (مکعب مستطیل) |
| ۱۰-۱۸ | تبهگنی |
| ۱۰-۲۰ | نوسانگر هارمونیک سه بعدی |
| ۱۰-۲۰ | در دستگاه مختصات دکارتی |
| ۱۰-۲۱ | ترازهای انرژی |

| صفحه | عنوان |
|-------|-----------------------------------------------|
| ۱۰-۲۲ | نوسانگر هارمونیک سه بعدی همسانگرد |
| ۱۰-۲۳ | تبهگنی |
| ۱۰-۲۴ | ۳-۱۰ پتانسیل‌های مرکزی |
| ۱۰-۲۴ | جداسازی معادله شرودینگر در مختصات کروی |
| ۱۰-۲۷ | تبهگنی |
| ۱۰-۲۸ | چگالی احتمال |
| ۱۰-۲۹ | پارितه |
| ۱۰-۳۰ | تبدیل به حالت یک بعدی |
| ۱۰-۳۶ | ۴-۱۰ ذره آزاد (در مختصات کروی) |
| ۱۰-۳۸ | معادله دیفرانسیل بسل کروی و جوابهای آن |
| ۱۰-۴۲ | توابع هنکل کروی |
| ۱۰-۴۳ | ویژه توابع ذره آزاد در مختصات کروی |
| ۱۰-۴۴ | بسط یک موج تخت براساس هماهنگ‌های کروی |
| ۱۰-۴۸ | ۵-۱۰ چاه پتانسیل مربعی (متقارن) سه بعدی |
| ۱۰-۵۰ | جواب قسمت داخلی |
| ۱۰-۵۰ | جواب قسمت خارجی |
| ۱۰-۵۳ | ترازهای انرژی |
| ۱۰-۶۱ | حالت‌های مقید با $E=0$ ($l > 1$) |
| ۱۰-۶۵ | تبهگنی |
| ۱۰-۶۶ | پتانسیل مربعی (متقارن) با دیواره‌های بی‌نهایت |
| ۱۰-۶۹ | ۶-۱۰ اتم هیدروژن |
| ۱۰-۷۸ | ترازهای انرژی |
| ۱۰-۷۹ | تبهگنی |
| ۱۰-۸۴ | ویژه توابع حالت‌های مقید |
| ۱۰-۸۵ | ویژه توابع شعاعی حالت‌های مقید |

| صفحه | عنوان |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| ۱۰-۸۹..... | چند جمله‌ای‌های لاگر وابسته |
| ۱۰-۹۱..... | چند جمله‌ای لاگر وابسته و چند جمله‌های فوق هندسی هم شار |
| ۱۰-۹۳..... | توابع موج هیدروژنی مربوط به طیف‌های گسسته |
| ۱۰-۱۰۰..... | توزیع احتمال |
| ۱۰-۱۰۶..... | مقادیر چشمداشتی |
| ۱۰-۱۰۸..... | حالت $A=1$ |
| ۱۰-۱۱۱..... | حالت $A=2$ |
| ۱۰-۱۱۵..... | ۱۰-۷) رشته هیدروژن گونه‌های تک اتمی، ایزوتوپ‌های هیدروژن، پوزیترونیم و |
| ۱۰-۱۱۸..... | اتمهای میوانی |
| ۱۰-۱۱۹..... | ۱۰-۸) نوسانگر همسانگرد سه بعدی |
| ۱۰-۱۲۴..... | ترازهای انرژی |
| ۱۰-۱۲۵..... | ویژه توابع نوسانگر همسانگرد سه بعدی |
| ۱۰-۱۲۶..... | تبهگنی |

فصل ۱۱: نمایش ماتریس توابع موج و عملگرها

| | |
|------------|---------------------------------------------------------|
| ۱۱-۴..... | ۱۱-۱) نمایش ماتریسی توابع موج و عملگرها |
| ۱۱-۸..... | ضرب داخلی (اسکالر) و ضرب خارجی ماتریسها |
| ۱۱-۱۰..... | خواص جبری ماتریسها |
| ۱۱-۱۳..... | ۱۱-۲) عملگرهای هرمیتی، عملگرهای یکانی و خواص جبری |
| ۱۱-۱۶..... | ۱۱-۳) ماتریسهای قطری |
| ۱۱-۱۷..... | معادله ویژه مقداری ماتریسی و ویژه مقادیر |
| ۱۱-۲۰..... | رابطه کامل بودن یا بسته بودن |
| ۱۱-۲۳..... | تغییر نمایش و تبدیلات یکانی |
| ۱۱-۲۸..... | تعبیر فیزیکی |

| عنوان | صفحه |
|--------------------------------------------------|-------|
| ۴-۱۱) قطری سازی یک ماتریس هرمیتی | ۱۱-۲۹ |
| تبدیلات متعامد | ۱۱-۳۷ |
| قطری سازی | ۱۱-۴۲ |
| تعبیر فیزیکی | ۱۱-۵۳ |
| ۵-۱۱) نوسانگر هارمونیک ساده، یک بررسی مجدد | ۱۱-۶۲ |
| ۶-۱۱) اندازه حرکت زاویه‌ای مداری | ۱۱-۷۱ |
| ۷-۱۱) نمایش ماتریسی عملگرهای نمائی | ۱۱-۷۶ |
| نکات تاریخی | ۱۱-۸۴ |
| پیرامون روابط عدم قطعیت | ۱۱-۸۴ |
| اصل عدم قطعیت | ۱۱-۸۶ |
| مسیر هایزنبرگ در رسیدن به روابط عدم قطعیت | ۱۱-۸۷ |
| استدلال هایزنبرگ | ۱۱-۹۰ |
| تعبیر رابطه هایزنبرگ | ۱۱-۹۳ |
| روابط عدم قطعیت یا اصل عدم قطعیت | ۱۱-۹۴ |
| شرح و تفسیر ریاضی | ۱۱-۹۸ |

فصل ۱۲: اسپین

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ۱-۱۲) نگاهی کلی به اندازه حرکت زاویه‌ای، طیف ویژه مقادیر J_z و J^2 | ۱۲-۳ |
| ۲-۱۲) نمایش ماتریسی عملگرهای اندازه حرکت زاویه‌ای کل | ۱۲-۱۰ |
| ۳-۱۲) اسپین و اندازه حرکت زاویه‌ای | ۱۲-۱۶ |
| برهم کنش ممان دوقطبی مغناطیسی با یک میدان مغناطیسی خارجی | ۱۲-۱۹ |
| الف) حالت $\vec{B} = cte$ (میدان یکنواخت) | ۱۲-۱۹ |
| ب) حالت $\vec{B} \neq cte$ (میدان غیریکنواخت) | ۱۲-۲۴ |
| آزمایش اشترن - گرلاخ | ۱۲-۲۵ |

| صفحه | عنوان |
|--------|------------------------------------------------------------------|
| ۱۲-۳۳ | اسپین، یک اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی (درونی) |
| ۱۲-۴۲ | نکات تاریخی |
| ۱۲-۴۹ | اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی |
| ۱۲-۵۳ | اسپین و تابع موج |
| ۱۲-۵۸ | اسپین یک دوم |
| ۱۲-۶۷ | نمایش ماتریسی اسپین $1/2$ |
| ۱۲-۷۵ | ماتریس‌های اسپین پائولی |
| ۱۲-۷۸ | ویژه مقادیر و ویژه توابع یک مؤلفه دلخواه از حالت اسپین $s = 1/2$ |
| ۱۲-۸۰ | حالت I $m = 1/2$ |
| ۱۲-۸۲ | حالت II $m = -1/2$ |
| ۱۲-۸۴ | دوران در فضای اسپینی دو مؤلفه‌ای ($s = 1/2$) |
| ۱۲-۸۶ | اندازه حرکت زاویه‌ای کل |
| ۱۲-۸۸ | اندازه حرکت زاویه‌ای کل و دوران |
| ۱۲-۸۹ | جمع نمودن اندازه حرکت‌های زاویه‌ای |
| ۱۲-۱۰۴ | روابط بازگشتی برای ضرائب کلبش - گوردن |
| ۱۲-۱۱۱ | ضرائب کلبش - گوردن برای $j_2 = s, j_1 = l$ |
| ۱۲-۱۱۸ | ویژه توابع $j_2 = 1/2, j_1 = l$ |
| ۱۲-۱۱۹ | افزودن دو اسپین با مقدار $1/2$ |
| ۱۲-۱۲۳ | برهم کنش اسپین - مدار |
| ۱۲-۱۲۸ | جمع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای و مدل برداری |
| ۱۲-۱۳۴ | نسبیت و ترازهای انرژی اتم هیدروژن |
| ۱۲-۱۳۸ | میدان مغناطیسی خارجی |
| ۱۲-۱۳۹ | میدان مغناطیسی ضعیف خارجی |
| ۱۲-۱۳۹ | (اثر نابهنجار زمین) |
| ۱۲-۱۵۰ | میدان مغناطیسی قوی خارجی |
| ۱۲-۱۵۰ | (اثر پاشین - بک) |
| ۱۲-۱۵۱ | نکات تاریخی |

Chapter 8

Formalism of Quantum Mechanics, Operator Methods II

فصل ۸

فرمولبندی مکانیک کوانتومی،

روشهای عملگری II

۸-۱) فضای کت

۸-۲) طیف انرژی نوسانگر هارمونیک

۸-۳) تغییر پایه‌های فضا و عملگر تبدیل

۸-۴) عملگر تحویل زمانی

۸-۵) تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ

۸-۶) نوسانگر هارمونیک ساده، تصاویر شرودینگر و هایزنبرگ

مقدمه

Introduction

در این فصل قصد داریم به بررسی رویدادها در فضای برداری مختلطی بپردازیم که نسبت به مسئله مورد بررسی کاملاً انعطاف داشته و ابعاد آن برحسب طبیعت سیستم فیزیکی مورد مشاهده ما تعیین می‌گردد. بطور مثال در حالتیکه با طیف پیوسته‌ای سر و کار داریم (مثل مکان و اندازه حرکت ذره آزاد) تعداد حالات ممکن بطور فزاینده‌ای افزایش یافته و فضای برداری متناظر با سیستم مورد بررسی نیز فضای هیلبرت (*Hilbert Space*) نامیده می‌شود (هیلبرت نخستین ریاضیدانی است که فضاهای برداری، با بعد بی‌نهایت را بررسی نمود).

قصد داریم شما را با نمادهای دیراک که بردارهای حالت این فضای برداری مختلط می‌باشند، آشنا نموده و در ادامه این واقعیت را تفهیم نمائیم که قضایا و روابط بدست آمده در این روش از جامعیت و سادگی بی‌نظیری برخوردار بوده و ضمناً از هر نوع نمایش به خدمت گرفته شده‌ای نیز مستقل می‌باشند.

دیراک بمانند همه تأثیرگذاران هم‌عصر خود در ابتدا متوجه زمختی و دشواری ریاضیات به خدمت گرفته شده توسط هایزنبرگ و دیگر همکاران او گردیده بود و پیش از همه درصدد برآمد تا با اتخاذ شیوه‌ای نو و دقیق، ضمن برطرف نمودن مشکلات و ناسازگاریها، راه را برای درک ویژگیها و زیباییهای موجود در مکانیک کوانتومی تا حد ممکن هموار نماید. وی به علت آشنایی و تسلط بر جبر غیرجابجایی و همینطور حساب ماتریسها، در مدت زمان کوتاهی توانست مطالب این مکانیک جدید و ریاضیات بکار رفته در آنرا، به شیوه‌ای نو و با بیانی ساختاری و نمادین (ساده و مختصر) و بسیار منسجم‌تر از خود هایزنبرگ و همین‌طور کارهای انجام شده توسط متآخرین، ارائه نماید. این شیوه نمادین، آنچنان ساده و جامع زوایای پنهان مکانیک کوانتومی را آشکارا در معرض دید همگان قرار می‌دهد که حتی امروزه نیز هر فردی در مواجهه با قابلیت‌های گسترده آن دچار بهت و حیرت می‌شود.

۸-۱) فضای کت

Ket Space

در مکانیک کوانتومی، یک حالت فیزیکی (یعنی یک حالت واقعی) را توسط یک بردار حالت (*state vector*) در یک فضای برداری مختلط نمایش می‌دهند. در تبعیت از دیراک (*Paul. A. M. Dirac*) ما این بردار را کت (*Ket*) حالت نامیده و آنرا با نماد $|\alpha\rangle$ نمایش می‌دهیم. بعنوان یک اصل موضوع فرض بر این است که این کت حالت (*state ket*) در برگرنده

تمامی (کل) اطلاعات مرتبط با آن حالت فیزیکی می‌باشد؛ در واقع هر آنچه از سیستم که ما مجاز به پرسش پیرامون آن باشیم، در داخل کت در بر گرفته شده است.

هر دو کت حالتی می‌توانند با یکدیگر جمع شوند، بصورتیکه

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \quad (1-1-8)$$

که البته جمع ایندو یعنی $|\gamma\rangle$ خود کت دیگری می‌باشد. اگر کت $|\alpha\rangle$ را در یک عدد مختلط بمانند c ضرب نمائیم، حاصل ضرب بدست آمده، یعنی $c|\alpha\rangle$ نیز خود یک کت می‌باشد. عدد مختلط c می‌تواند در سمت چپ و یا در سمت راست قرار گیرد و ایندو حالت از لحاظ مفهومی اختلافی ندارند،

$$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c \quad (2-1-8)$$

در حالت خاصی که c برابر با صفر می‌باشد، کت حاصله را کت صفر (*null ket*) می‌نامند.

یکی دیگر از اصول موضوعه مکانیک کوانتومی آن است که کتهای $|\alpha\rangle$ و $c|\alpha\rangle$ ($c \neq 0$) حالت فیزیکی یکسانی را به نمایش می‌گذارند. به بیان دیگر، در فضای برداری مختلط مورد نظر ما تنها این راستا (*direction*) است که از اهمیت مفهومی برخوردار می‌باشد.

عملگرها

Operators

یک مشاهده‌پذیر (*observable*)، همانند هر یک از مؤلفه‌های اندازه حرکت، می‌تواند از طریق یک عملگر (*operator*) بمانند A در فضای برداری مسئله مورد بررسی ما نمایش داده شود. بطور کلی یک عملگر تنها می‌تواند از سمت چپ بر یک کت عمل نماید به نحویکه

$$A(|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle \quad (3-1-8)$$

در حالت کلی $A|\alpha\rangle$ ، ضرب ساده یک ثابت در یک کت نبوده و این متفاوت از ضرب اعداد در کتها می‌باشد.

توجه داشته باشید که در حالت کلی نتیجه بدست آمده از عمل عملگر A بر روی کت حالت کلی $|\alpha\rangle$ ، کت دیگری بمانند $|\eta\rangle$ می‌باشد، به بیان دقیق‌تر آنکه

$$A|\alpha\rangle = |\eta\rangle \quad (4-1-8)$$

اما همیشه کتهای حالت خاصی وجود دارند که از سادگی و البته اهمیت ویژه‌ای برای ما برخوردار می‌باشند، به نحویکه نتیجه عمل عملگر بر روی این کتهای خاص به گونه‌ایست که خود کت اولیه (صرف نظر از یک ضریب) را مجدداً تولید می‌نماید، یعنی اینکه

$$\begin{aligned}
 A |a'\rangle &= a' |a'\rangle \\
 A |a''\rangle &= a'' |a''\rangle \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{۵-۱-۸}$$

به این قبیل کتها، ویژه کت (*Eigenket*) اطلاق می‌گردد، البته مقادیر a' ، a'' ، ... نه یک عملگر بلکه تنها مقادیری عددی می‌باشند. مجموعه مقادیر عددی $\{a', a'', \dots\}$ را مجموعه ویژه مقادیر (*Set of Eigenvalues*) عملگر A نامیده و گاهی نیز آنرا با نماد خلاصه‌تر $\{a'\}$ نمایش می‌دهند. حالت فیزیکی متناظر با یک ویژه کت را یک ویژه حالت (*Eigenstate*) می‌نامند.

علی‌الاصول (بطور خیلی رسمی) ما با یک فضای برداری (مختلط) N بعدی درگیر هستیم که توسط N ویژه کت مشاهده‌پذیر A که معمولاً آنرا بصورت مجموعه $\{|a'\rangle\}$ نمایش می‌دهیم، پوشش داده شده و در آن یک کت دلخواه و کلی بمانند $|\alpha\rangle$ را می‌توان از طریق این ویژه کتها بصورت ذیل بسط داد،

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} C_{a'} |a'\rangle \tag{۶-۱-۸}$$

که در آن $C_{a'}$ ها یعنی ضرائب بسط، در حالت کلی مختلط می‌باشند.

ویژه حالت‌های هم زمان دو مشاهده‌پذیر جابجا شونده (*compatible*، هم‌سازگار) را با نماد $|a, b\rangle$ نمایش می‌دهیم که این برچسب‌ها (b, a) همواره مقدار عددی ویژه مقادیر و البته تعداد مشاهده‌پذیرهای دستگاه را به نمایش می‌گذارند. در آینده ارتباط بین بردار انتزاعی (*abstract*) $|\psi\rangle$ و تابع موج $\psi(x)$ را نیز بدست خواهیم آورد.

Bra Space and Inner Product

فضای برا و ضرب داخلی

فضای برداری مختلطی که تاکنون به مطالعه آن پرداخته‌ایم، فضای کت می‌باشد. حال قصد داریم به معرفی ایده فضای برا (*Bra space*) بپردازیم، فضائی برداری و مختلط که همزاد (*dual to*)، نیمه دیگر، نمود دیگر) فضای کت می‌باشد.

به عنوان یک اصل موضوع، فرض را بر این می‌گذاریم که متناظر با هر کت بمانند $|\alpha\rangle$ ، یک برا وجود دارد که با نماد $\langle\alpha|$ در نمود دیگر فضای کت، یعنی فضای برا آنرا نمایش می‌دهیم. فضای برا به توسط مجموعه ویژه براها (*Eigenbras*) یعنی $\{\langle a'|, \langle a''|, \dots\}$ پوشش داده می‌شود که متناظر با مجموعه ویژه کتها $\{|a'\rangle, |a''\rangle, \dots\}$ می‌باشند. در واقع یک تناظر یک به یک

بین فضای کت و فضای برا وجود دارد به نحویکه

$$|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|$$

$$|a'\rangle, |a''\rangle, \dots \leftrightarrow \langle a'|, \langle a''|, \dots$$

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow \langle\alpha| + \langle\beta| \quad (7-1-8)$$

به بیانی نه چندان دقیق، می‌توان فضای برا را نوعی تصویر آئینه‌ای از فضای کت در نظر گرفت. به عنوان یک اصل موضوع، همزاد $c|\alpha\rangle$ را بصورت $c^* \langle\alpha|$ در نظر می‌گیریم (نه $c \langle\alpha|$) که نکته‌ای مهم بوده و باید به آن توجه ویژه گردد، به نحویکه در حالت کلی شاهد آن هستیم که

$$c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle \leftrightarrow c_\alpha^* \langle\alpha| + c_\beta^* \langle\beta| \quad (8-1-8)$$

حال قصد داریم به معرفی ضرب نقطه‌ای یک برا و یک کت پردازیم. همانطور که بیاد دارید ویژه حالت‌های ذره در چاه پتانسیل با دیواره‌های بی‌نهایت، به ازاء مقادیر مختلف متعامد بودند، یعنی اینکه

$$\int u_m^*(x) u_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (9-1-8)$$

چگونه می‌توان این رابطه را برحسب براها و کتها نمایش داد؟

حاصل ضرب نقطه‌ای یک برا در یک کت را با نماد خلاصه شده $\langle m/n \rangle$ (بخوانید برا - کت) تعریف خواهیم نمود. بطور کلی، حاصل ضرب نقطه‌ای یک برا بمانند $\langle\phi|$ در یک کت بمانند $|\psi\rangle$ ، از

لحاظ عددی همان رابطه‌ای است که پیش‌تر برای ضرب نرده‌ای تعریف نموده‌ایم و آن عبارتست از

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x) \psi(x) dx \quad (10-1-8)$$

همچنین باید توجه داشته باشیم که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\phi^*(x) \psi(x))^* dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \phi(x) dx \quad (11-1-8)$$

یا اینکه

$$\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle \quad (12-1-8)$$

از این رابطه می‌توان استفاده نمود و نشان داد که

$$\langle\phi|\phi\rangle \quad (13-1-8)$$

همواره یک عدد حقیقی است چرا که

$$\langle\phi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\phi\rangle \quad (14-1-8)$$

همچنین به عنوان یک اصل موضوع می‌پذیریم که

$$\langle\phi|\phi\rangle \geq 0 \quad \text{و} \quad (\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0) \quad (15-1-8)$$

به این مطلب اصل موضوع متریک مثبت (*postulate of positive definite metric*) اطلاق

می‌گردد (البته توجه داشته باشید که حالت تساوی $\langle \phi | \phi \rangle = 0$ مربوط به کت صفر (*null ket*) می‌باشد که حالتی بدیهی بوده و فاقد هرگونه ارزش فیزیکی است. از همین روی اصل موضوع متریک مثبت و نه متریک غیرمنفی (≥ 0) نامیده می‌شود). همچنین می‌دانیم که

$$\langle \phi | \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \rangle = \alpha \langle \phi | \psi_1 \rangle + \beta \langle \phi | \psi_2 \rangle \quad (16-1-8)$$

و

$$\langle \phi | \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \rangle^* = \alpha^* \langle \psi_1 | \phi \rangle + \beta^* \langle \psi_2 | \phi \rangle \quad (17-1-8)$$

و اما برای بهنجار نمودن یک کت بمانند $|\alpha\rangle$ کافی است بنویسیم که

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}} |\alpha\rangle \quad \text{و (اگر } |\alpha\rangle \neq 0 \text{)} \quad (18-1-8)$$

زیرا همانطور که مشاهده می‌کنید $\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1$ می‌باشد.

به مقدار $\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}$ نُرم یا اندازه (*norm*) کت (کلی و دلخواه) $|\alpha\rangle$ گفته می‌شود.

در حالت کلی هرگاه عملگری بر حالتی عمل نماید، حالت دیگری را بدست می‌دهد. به زبان دیراک، هرگاه عملگری بر یک کت عمل نماید، کت دیگری را بدست می‌دهد که می‌توان دو شکل ذیل را برای عمل آن در نظر گرفت،

$$A |\psi\rangle = |A \psi\rangle \quad (19-1-8)$$

سمت چپ این رابطه عملگری را نشان می‌دهد که بر یک کت عمل می‌نماید و سمت راست آن نمایشگر کت حاصل است. همچنین می‌توان نوشت

$$\langle \phi | A \psi \rangle = \langle \phi | A | \psi \rangle \quad (20-1-8)$$

با توجه به رابطه (۱۰-۱-۸) متوجه می‌شویم که

$$\langle \phi | A | \psi \rangle = \langle \phi | A \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x) A \psi(x) dx \quad (21-1-8)$$

همانطور که به یاد دارید، مزدوج هرمیتی (الحاقی) عملگر A را با A^\dagger نمایش داده و آنرا چنان تعریف می‌کردیم که

$$\int \psi(x) (A \phi(x))^* dx = \int (A \phi(x))^* \psi(x) dx = \int \phi^*(x) A^\dagger \psi(x) dx \quad (22-1-8)$$

که به زبان نمادهای دیراک عبارت خواهد بود از

$$\langle A \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A^\dagger | \psi \rangle \quad (23-1-8)$$

به همین نحو می‌توان استدلال نمود که

$$\langle \phi | A^\dagger | \psi \rangle^* = \langle A \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | A \phi \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle \quad (24-1-8)$$

حال قصد داریم که قضیه بسط را در فضای برداری بررسی نمائیم. همان طور که پیش تر اشاره شد، هر تابع موج دلخواهی را می توان برحسب مجموعه کامل ویژه توابع عملگرهای هرمیتی بسط داد. قصد داریم کت دلخواه $|\psi\rangle$ را برحسب مجموعه کامل ویژه حالت های متعامدی بمانند $|n\rangle$ ها بسط دهیم،

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \quad (25-1-8)$$

از شرط متعامد بودن ویژه حالتها یعنی

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn} \quad (26-1-8)$$

نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} \langle m | \psi \rangle &= \sum_n C_n \langle m | n \rangle \\ &= \sum_n C_n \delta_{mn} = C_m \end{aligned}$$

$$\therefore C_m = \langle m | \psi \rangle \quad (27-1-8)$$

یا اینکه

$$C_n = \langle n | \psi \rangle \quad (28-1-8)$$

حال اگر رابطه بدست آمده را در (25-1-8) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_n \langle n | \psi \rangle |n\rangle \\ &= \sum_n |n\rangle \langle n | \psi \rangle \end{aligned} \quad (29-1-8)$$

در این مرحله، اشاره به چند نکته مهم ضروری است:

باید توجه داشته باشیم که حاصل ضرب نقطه ای $\langle \alpha | \beta \rangle$ نه یک عملگر، بلکه تنها یک عدد بوده و از همین روی به راحتی می تواند جایجا گردد. اما حاصل ضرب پدیدار شده $|\alpha\rangle \langle \beta|$ (و در اینجا $|n\rangle \langle n|$) که به آن ضرب خارجی (*outer product*) گفته می شود، یک عملگر بوده و می تواند از چپ و یا راست عمل نماید.

در حالت های قبلی شاهد بودیم که یک عملگر بمانند A می تواند از چپ بر روی یک کت $(A|\psi\rangle)$ و یا از راست بر روی یک برا $(\langle \phi|A)$ عمل نماید، اما باید این نکته را نیز در نظر داشت که صحت این مطالب منوط به مجاز بودن آرایش شکل گرفته می باشد. بطور مثال حالت های $|\psi\rangle A$ ، $A \langle \phi|$ نمونه هایی از حالت های غیرمجاز می باشند. اینها در حقیقت نه یک کت، نه یک برا، و نه حتی یک عملگر می باشند. اگر کتهای $|\psi\rangle$ ، $\langle \phi|$ متعلق به یک فضای کت (یا براساس

$|\psi\rangle$ و $\langle\phi|$ متعلق به یک فضای برا) باشند آنگاه حالت‌هایی بمانند $\langle\phi|\psi\rangle$ یا $|\psi\rangle\langle\phi|$ (و یا $|\psi\rangle\langle\phi|$ و $\langle\phi|\psi\rangle$) نیز غیرمجاز می‌باشند.

از آنجائیکه رابطه (۸-۱-۲۹) باید به ازاء هر کتی $(|\psi\rangle)$ ، بسط داده شده برحسب مجموعه کامل ویژه حالت‌های عملگر هرمیتی، برقرار باشد از همین روی می‌توان نتیجه گرفت که

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle = \left(\sum_n |n\rangle\langle n| \right) |\psi\rangle$$

$$\therefore \Rightarrow \sum_n |n\rangle\langle n| = I \quad (۸-۱-۳۰)$$

که در آن I عملگر یکه یا واحد (*identity or unit operator*) بوده و دارای این خاصیت است که اگر بر حالتی عمل نماید، آن حالت را تغییر نمی‌دهد (یا به عبارتی بی‌هیچ تغییری مجدداً آنرا ایجاد می‌نماید). به رابطه (۸-۱-۳۰) رابطه کامل بودن (*completeness relation*) یا بسته بودن (*closure*) اطلاق می‌شود.

این رابطه دارای فواید بسیاری بوده، به نحویکه در یک زنجیره مجاز از حاصل ضرب کت‌ها، براه‌ها و عملگرها، و در هر کجای آن که نیاز داشته باشیم می‌توانیم این عملگر یکه را وارد نمائیم. به طور مثال مورد $\langle\psi|\psi\rangle$ را در نظر بگیرید؛ با وارد کردن عملگر یکه بین برا $|\psi\rangle$ و کت $\langle\psi|$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \langle\psi| \left(\sum_n |n\rangle\langle n| \right) |\psi\rangle \\ &= \sum_n \langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle \\ &= \sum_n \langle n|\psi\rangle^* \langle n|\psi\rangle \\ &= \sum_n |\langle n|\psi\rangle|^2 \end{aligned} \quad (۸-۱-۳۱)$$

اگر $|\psi\rangle$ خود به‌نحار باشد، در آن صورت ضرائب بسط می‌توانند رابطه ذیل را برآورده سازند،

$$\sum_n |C_n|^2 = \sum_n |\langle n|\psi\rangle|^2 = 1 \quad (۸-۱-۳۲)$$

همانطور که پیش‌تر نیز اشاره شد، ترکیب $|n\rangle\langle n|$ یک عملگر می‌باشد. اجازه دهید حاصل عمل آن بر روی کت $|\psi\rangle$ را بررسی نمائیم،

$$\begin{aligned} &(|n\rangle\langle n|)|\psi\rangle \\ &= |n\rangle\langle n|\psi\rangle \\ &= C_n |n\rangle \end{aligned} \quad (۸-۱-۳۳)$$

همانطور که مشاهده می‌کنید عملگر $|n\rangle\langle n|$ آن بخشی از کت $|\psi\rangle$ را بر می‌گزیند که هم راستا (موازی) با کت $|n\rangle$ باشد، از همین روی عملگر $|n\rangle\langle n|$ به عنوان عملگر تصویر (projection operator) در امتداد $|n\rangle$ شناخته شده و گاهی نیز با نماد

$$\Lambda_n = |n\rangle\langle n| \quad (34-1-8)$$

نمایش داده می‌شود. در این صورت رابطه کامل بودن یا همان بسته بودن بصورت ذیل بازنویسی می‌شود،

$$\sum_n \Lambda_n = \sum_n |n\rangle\langle n| = I \quad (35-1-8)$$

اما شاید هنوز این رابطه از دیدگاه انتگرالی (نمادهای انتگرالی پیشین) کمی برای شما غیرقابل درک باشد. برای درک بهتر عملگر یگه، می‌توان آنرا بصورت مفهومی‌تری نیز بیان داشت. اگر ابتدا توجه خود را به حالت‌های گسسته معطوف نمائیم، خواهیم داشت

$$\psi(x) = \sum_n C_n u_n(x) \quad (36-1-8)$$

یا اینکه

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \quad (37-1-8)$$

که البته منوط به کامل بودن ویژه توابع $u_n(x)$ می‌باشد. با عمل دادن $\langle m|$ بر هر دو طرف این رابطه از سمت چپ خواهیم داشت

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle m|\psi\rangle &= \sum_n C_n \langle m|n\rangle \\ &= \sum_n C_n \delta_{mn} \\ &= C_m \end{aligned}$$

$$= C_m$$

$$\therefore \Rightarrow \langle n|\psi\rangle = C_n \quad (38-1-8)$$

که به زبان انتگرالی عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} C_n &= \langle n|\psi\rangle \\ &= \int u_n^*(x) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (39-1-8)$$

حال با جایگذاری این رابطه در عبارت اصلی تابع موج خواهیم داشت

$$\psi(x) = \sum_n C_n u_n(x)$$

$$= \sum_n \left(\int u_n^*(x') \psi(x') dx' \right) u_n(x) \quad (۴۰-۱-۸)$$

که با کمی عملیات ریاضی نتیجه می‌دهد

$$\psi(x) = \int \left(\sum_n u_n^*(x') u_n(x) \right) \psi(x') dx'$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید عبارت داخل پرانتز درواقع یک تابع دلتای دیراک می‌باشد، یعنی اینکه

$$\psi(x) = \int \left(\sum_n u_n^*(x') u_n(x) \right) \psi(x') dx' = \int \delta(x' - x) \psi(x') dx' \quad (۴۱-۱-۸)$$

و بنابراین خواهیم داشت

$$\sum_n u_n^*(x') u_n(x) = \delta(x' - x) \quad (۴۲-۱-۸)$$

رابطه فوق، همان رابطه کامل بودن یا بسته بودن (*closure*) است که البته صحت آن به کامل بودن مجموعه ویژه توابع $u_n(x)$ بستگی دارد.

بطور مثال می‌توان از این رابطه در ضرب نقطه‌ای دو تابع موج استفاده نمود،

$$\begin{aligned} \langle \phi | \psi \rangle &= \int \phi^*(x) \psi(x) dx \\ &= \int \phi^*(x) \left(\int \delta(x' - x) \psi(x') dx' \right) dx \\ &= \iint \phi^*(x) \delta(x' - x) \psi(x') dx dx' \\ &= \iint \phi^*(x) \left(\sum_n u_n^*(x') u_n(x) \right) \psi(x') dx dx' \\ &= \sum_n \int \phi^*(x) u_n(x) dx \int u_n^*(x') \psi(x') dx' \\ &= \sum_n \langle \phi | n \rangle \langle n | \psi \rangle \\ &= \langle \phi | \left(\sum_n | n \rangle \langle n | \right) | \psi \rangle \end{aligned} \quad (۴۳-۱-۸)$$

همانطور که مشاهده می‌کنید در سیستم نمادگذاری دیراک، رابطه کامل بودن یا بسته بودن را می‌توان به شکل فشرده ذیل بازنویسی نمود

$$\sum_n | n \rangle \langle n | = I \quad (۳۵-۱-۸)$$

که البته I همان عملگر یکه است.

تمرین (۱-۸)

شان دهید که ویژه کتهای هر عملگر هرمیتی که متناظر با ویژه مقادیر متفاوتی می‌باشند، بر هم عمودند.

فرض کنید

$$\begin{cases} A|a\rangle = a|a\rangle \\ A|b\rangle = b|b\rangle \end{cases} \quad (44-1-8)$$

که با توجه به هرمیتی بودن A ، ویژه مقادیر a و b باید حقیقی باشند. با ضرب اولین معادله در برا $|b\rangle$ و دومین معادله در برا $|a\rangle$ خواهیم داشت

$$\begin{cases} \langle b|A|a\rangle = a\langle b|a\rangle \\ \langle a|A|b\rangle = b\langle a|b\rangle \end{cases} \quad (45-1-8)$$

حال با نوشتن مزدوج مختلط رابطه دوم نتیجه می‌گیریم که

$$\langle a|A|b\rangle^* = \langle a|Ab\rangle^* = \langle Ab|a\rangle = b^*\langle b|a\rangle = b\langle b|a\rangle$$

$$\therefore \Rightarrow \langle Ab|a\rangle = b\langle b|a\rangle \quad (46-1-8)$$

از طرف دیگر با توجه به هرمیتی بودن A ، یعنی اینکه $A = A^\dagger$ می‌دانیم که

$$\langle Ab|a\rangle = \langle b|A^\dagger|a\rangle = \langle b|A|a\rangle = a\langle b|a\rangle \quad (47-1-8)$$

که با تفاضل این دو رابطه از یکدیگر خواهیم داشت

$$(a-b)\langle b|a\rangle = 0 \quad (48-1-8)$$

بنابراین اگر $a \neq b$ باشد، آنگاه تنها می‌توانیم داشته باشیم

$$\text{اگر } a \neq b \Rightarrow \langle b|a\rangle = 0 \quad (49-1-8)$$

حال به قضیه بسط باز می‌گردیم. تعبیر ضرائب بسط C_n این می‌باشد که $|C_n|^2$ برابر با احتمال این مسئله است که اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر A ، بر روی ویژه کتهای $|n\rangle$ ، ویژه مقدار n را نتیجه دهد. توجه داشته باشیم که مجموعه $|n\rangle$ ها لزوماً گسسته نمی‌باشند و متغیرهایی که با n برچسب می‌خورند حتی می‌توانند پیوسته نیز باشند. بطور مثال اگر مکان حالتی را که با $|\psi\rangle$ مشخص شده است، اندازه‌گیری نمائیم، احتمال اینکه مقدار x بدست آید چقدر است؟

مکان را که یکی از مشاهده‌پذیرهاست، با عملگر هرمیتی $X = X_{op}$ نمایش می‌دهیم. این مشاهده‌پذیر مجموعه کاملی از ویژه کتهای را خواهد داشت که ویژه مقادیرشان اعداد x می‌باشند. معادله ویژه مقداری این عملگر عبارت خواهد بود از

$$X|x\rangle = x|x\rangle \quad (50-1-8)$$

هرچند که شکل دقیق عملگر X را نمی‌دانیم، با اینحال با توجه به قضیه بسط خواهیم داشت

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} C(x)|x\rangle dx \quad (51-1-8)$$

در این مرحله با توجه به پیوسته بودن x ، انتگرال را جایگزین سیگما نموده‌ایم. با استفاده از متعامد