بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

مبانی

روش اجزاء محدود

در دینامیک سازه‌ها

تألیف و تدوین:

سید امیرالدین صدرنژاد

دانشیار دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

سر شناسنامه	:	صدرنژاد ، امیر الدین ،۱۳۳۳
عنوان و نام پدید آور	:	مبانی روش اجزاء محدود در دینامیک سازه ها/ تالیف وتدوین امیرالدین صدر نژاد
مشخصات نشر	:	تهران؛ دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی،۱۳۸۴.
مشخصات ظاهری	:	۶۷۹ص. مصور ، جدول ، نمودار .
شابک	:	۹-۲-۹۵۵۸۹-۹۶۴-۹۷۸؛ ۱۱۰۰۰۰ ریال (چاپ دوم)
وضعیت فهرست نویسی	:	فاپا.
یاد داشت		پشت جلدبه‌انگلیسی : Amirodin Sadrnejad The basis of:flniteElement methods in Structural Dynamics
یادداشت	:	چاپ دوم : ۱۳۹۰.
یادداشت	:	کتابنامه : ص ۶۷۰.
موضوع	:	دینامیک سازه ها
موضوع	:	روش المان های محدود .
شناسه افزوده	:	Ghasemzadeh, Abbas
شناسه افزوده	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی.
رده بندی کنگره	:	۲۱۳۸۴م۴ص/۶۵۴ TA
رده بندی دیویی	:	۶۲۴/۱۷۱
شماره کتابشناسی ملی	:	۱۹۴۱۳-۸۴م

عنوان : مبانی روش اجزاء محدود در دینامیک سازه ها
تألیف : سید امیر الدین صدر نژاد
ناشر: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
چاپ دوم : بهار ۱۳۹۰
لیتوگرافی : سعیدی
چاپ : زیتون
ناظر چاپ : غلامرضا کار گریان مروستی
شمارگان : ۱۰۰۰ جلد
قیمت : ۱۱،۰۰۰ تومان
شابک : ۹-۲-۵۸۹-۹۵-۹۶۴-۹۷۸ ISBN: ۹-۲-۵۸۹-۹۵-۹۶۴-۹۷۸

نشانی: تهران، لویزان – کد پستی ۱۶۷۸۸-۱۵۸۱۱ – صندوق پستی ۱۶۳ – ۱۶۷۸۵ – تلفن: (۲۶۳۲) ۹ – ۲۲۹۷۰۰۶۰، ۲۲۹۷۰۰۷۰، نمابر: ۲۲۹۷۰۰۰۳، پست الکترونیکی: Publish@srttu.edu، وب سایت: http://Publish.srttu.edu

فهرست مطالب

مقدمه ۲
جایگاه روش اجزاء محدود درزندگی امروزه ۲
گروه بندی مکانیک سازه‌ها ۳

فصل اول:

روابط حاکم بر معادلات حرکت ۱۵
۱ـ۱ تعادل دینامیکی ۱۵
۱ـ۲ اصول حاکم بر روش تغییر مکان مجازی ۱۹
۱ـ۳ اصل همیلتون ۲۰
۱ـ۴ معادلات لاگرانژ ۲۶
۱ـ۵ معادلات حرکت برای مجموعه با محدودیتهای مرزی ۳۱
۱ـ۶ اصل همیلتون در حالت عمومی ۳۵
۱ـ۷ معادلات لاگرانژ در حالت عمومی ۳۷
مراجع ۴۰

فصل دوم:

توابع انرژی جزء ۴۱

۲ـ۱ اجزاء یک محوری ۴۳

۲ـ۲ اجزاء پیچشی ۴۵

۲ـ۳ اجزاء تیرخمشی ۴۸

۲ـ۴ اجزاء تیر خمشی عمیق ۵۰

۲ـ۵ اجزاء غشائی ۵۲

۲ـ۶ اجزاء صفحه خمشی نازک ۵۵

۲ـ۷ اجزاء صفحه خمشی ضخیم ۵۸

۲ـ۸ اجزاء سه بعدی ۶۰

۲ـ۹ اجزاء سه بعدی با تقارن محوری ۶۲

۲ـ۱۰ تابع میرایی (استهلاک انرژی) ۶۳

۲ـ۱۱ معادلات حرکت و شرائط مرزی ۶۵

مراجع ۷۲

فصل سوم:

روش اجزاء محدود بروش تغییرمکان ۷۳

۳ـ۱ روش ریلی رتیز ۷۴

۳ـ۲ باروش اجزاء محدود تغییر مکان ۸۳

۳ـ۳ ارتعاش جزء یک محوری فشاری (میله)یا کششی ۹۰

۳ـ۴ میله با ارتعاش پیچشی ۱۰۱

۳ـ۵ ارتعاش جزء خمشی تیر ۱۰۵

۳ـ۶ ارتعاش قاب صفحه‌ای ۱۱۱

۳ـ۷ ارتعاش قاب سه بعدی ۱۲۴

۳ـ۸ افزایش تعداد گره جزء برای افزایش دقت ۱۳۴

۹ـ۳ تغییرشکل برشی و آثار ماند چرخشی ۱۳۹
۱۰ـ۳ انتگرال‌های عددی ۱۴۷
۱۱ـ۳ مطالب اضافی برای تحلیل تیرها ۱۶۲
مراجع ۱۶۷

فصل چهارم:

ارتعاش در صفحه اجزاء صفحه‌ای ۱۷۱
۱ـ۴ جزء مثلث با تابع شکل خطی ۱۷۳
۲ـ۴ جزء مستطیل با تابع شکل خطی ۱۸۰
۳ـ۴ ا جزاء چهارضلعی با تغییر شکل خطی ۱۸۸
۴ـ۴ مختصات مساحتی در اجزاء مثلث ۱۹۴
۵ـ۴ روش کاهش خطا ۱۹۸
مراجع ۲۰۵

فصل پنجم:

ارتعاش اجسام سه بعدی ۲۰۷
۱ـ۵ ارتعاش اجسام با تقارن محوری ۲۰۷
۲ـ۵ بارگذاری خارجی ۲۰۹
۳ـ۵ تغییر مکانها ۲۱۳
۴ـ۵ جملات انرژی خلاصه شده ۲۱۳
۵ـ۵ المان (جزء) مثلثی خطی ۲۱۴
۶ـ۵ اجزاء مرکزی ۲۲۵
۷-۵ ارتعاش اجسام سه بعدی غیر منظم ۲۲۹
۸-۵ جزء مکعب مستطیل شش وجهی (المان آجری) ۲۳۱

۵-۹ جزء همگام شش وجهی ۲۳۸
۵-۱۰ جزء پنج وجهی راستگرد ۲۴۵
۵-۱۱ مختصات حجمی برای جزء چهار وجهی ۲۵۰
۵-۱۲ اجزاء چهار وجهی ۲۵۳
۵-۱۳ روشهای افزایش دقت در اجزاء ۲۵۶
مراجع ۲۶۷

فصل ششم:

ارتعاش صفحات انعطاف پذیر ۲۶۹
۶ـ۱ اجزاء مستطیل شکل نازک (با عدم تطبیق) ۲۶۹
۶ـ۲ اجزاء مستطیل شکل صفحه نازک (تطبیق داده شده) ۲۸۶
۶ـ۳ اجزاء ضخیم مستطیل شکل ۲۹۲
۶ـ۴ جزء مثلث شکل نازک (بدون تطبیق) ۳۰۰
۶ـ۵ اجزاء مثلث شکل نازک (با ارضاء شرایط تطبیق) ۳۱۱
۶ـ۵ـ۱ مختصات کارتزین ۳۱۱
۶ـ۵ـ۲ مختصات مساحتی ۳۱۸
۶ـ۶ اجزاء مستطیل شکل ضخیم ۳۲۵
۶ـ۷ اجزاء دیگر برای خمش صفحه ۳۲۹
مراجع ۳۴۱

فصل هفتم:

ارتعاش صفحات تقویت شده و سازه‌های صفحه‌ای تا شده ۳۴۵
۷ـ۱ صفحات تقویت شده نوع I ۳۴۶
۷ـ۲ صفحات تقویت شده نوع II ۳۵۱

۷ـ۳ صفحات تا شده نوع I ۳۵۷
۷ـ۴ صفحات تا شده نوع II ۳۶۰
۷ـ۵ صفحات تا شده نوع III ۳۶۴
مراجع ۳۶۹

فصل هشتم:

تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌ها ۳۷۱
۸ـ۱ مقدمات و نکات تعریفی لازم ۳۷۱
۸ـ۱ـ۱ تعامد بردارهای ویژه ۳۷۹
۸ـ۱ـ۲ انتقال به گونه‌های استاندارد ۳۸۰
۸ـ۲ تعداد مقادیر ویژه ۳۸۶
۸ـ۳ انتقال متعامد ماتریسها ۳۹۶
۸ـ۴ روش یعقوبی ۳۹۶
۸ـ۵ روش داده‌ها و ذخیره‌ها ۴۰۰
۸ـ۶ مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس متقارن سه گانه قطری ۴۰۳
۸ـ۶ـ۱ روش گرشگورین ۴۰۳
۸ـ۶ـ۲ روش تکرار معکوس ۴۰۵
۸ـ۷ روشهای LR و QR و QL ۴۱۱
۸ـ۷ـ۱ روش LR ۴۱۱
۸ـ۷ـ۲ روش QR ۴۱۳
۸ـ۷-۳ روش QL ۴۱۶
۸ـ۸ کاهش تعداد درجات آزادی ۴۱۷
۸ـ۸ـ۱ بهره‌وری از تقارن ۴۱۷
۸ـ۸ـ۲ سازه‌های با پریود ارتعاشی چرخشی ۴۲۱
۸ـ۸ـ۳ حذف درجات آزادی غیرلازم ۴۲۷

۸ـ۸ـ۴   تجزیه مود به مؤلفه‌های گوناگونی ۴۳۴
۸ـ۸ـ۴ـ۱   روش اتصال گیردار ۴۳۵
۸ـ۸ـ۴ـ۲   روش مرز آزاد بین زیرسازه‌ها ۴۳۸
۸ـ۹   تحلیل مسائل بزرگ با جوابهای مخصوص ۴۴۳
۸ـ۹ـ۱   روش دو مقطعی و تکرار معکوس ۴۴۴
۸ـ۹ـ۲   روش تکرار در زیر فضا ۴۴۴
۸ـ۹ـ۳   روش تکرار همزمان ۴۴۷
۸ـ۹ـ۴   روش لانچدز ۴۴۸
مراجع ۴۵۲

فصل نهم:

ارتعاش اجباری در اثر اعمال نیرو ۴۵۷
۹ـ۱   تحلیل مودی مجموعه‌ها ۴۵۸
۹ـ۲   تفسیر میرائی مجموعه‌ها ۴۵۹
۹ـ۲ـ۱ میرائی ناشی از لزجت ۴۶۰
۹ـ۳   پاسخ در حالت ارتعاش هارمونیک ۴۶۳
۹ـ۳ـ۱   تحلیل مودی ۴۶۴
۹ـ۳ـ۲   تحلیل مستقیم ۴۷۷
۹ـ۴   انعکاس در برابر تحریک با تغییرات متناوب ۴۸۷
۹ـ۵   پاسخ گذرا ۴۹۲
۹ـ۵ـ۱   روش تحلیل مودی ۴۹۲
۹ـ۵ـ۱ـ۱   روش میان اختلاف ۴۹۷
۹ـ۵ـ۱ـ۲   روش هوبلت ۵۰۵
۹ـ۵ـ۱ـ۳   روش نیومارک ۵۱۲
۹ـ۵ـ۱ـ۴   روش ویلسون θ ۵۲۱

۹ـ۵ـ۲   روش تحلیل مستقیم ۵۲۵
۹ـ۵ـ۲ـ۱   روش میان اختلاف ۵۲۶
۹ـ۵ـ۲ـ۲   روش هوبلت ۵۳۳
۹-۵-۲-۳   روش نیومارک ۵۳۳
۹ـ۵ـ۲ـ۴   روش ویلسون θ ۵۳۵
۹ـ۵ـ۳   انتخاب مناسب نموٌ زمان ۵۳۵
مراجع ۵۳۷

فصل دهم:

پاسخ اجباری II ۵۳۹
۱۰ـ۱   پاسخ مجموعه در برابر تحریک تصادفی ۵۴۸
۱۰ـ۱ـ۱   تعریف ویژگیهای تحریک ۵۵۰
۱۰ـ۱ـ۲   انعکاس مجموعه با یک درجه آزادی ۵۵۳
۱۰ـ۱ـ۳   انعکاس مستقیم مجموعه با چند درجه آزادی ۵۵۷
۱۰ـ۱ـ۴   انعکاس مودی مجموعه با چند درجه آزادی ۵۶۲
۱۰ـ۱ـ۵   خستگی و شکست ۵۶۴
۱۰ـ۲   ساده سازی تحلیل مودی ۵۶۸
۱۰ـ۲ـ۱   روش مود شتاب ۵۷۴
۱۰ـ۲ـ۲   روش پس‌ماند انعطاف‌پذیری ۵۷۷
۱۰ـ۳   انعکاس تغییر مکانهای تحمیلی ۵۷۸
۱۰ـ۳ـ۱   روش انعکاس مستقیم ۵۷۸
۱۰ـ۴   روش طیف انعکاس ۵۸۵
۱۰ـ۴ـ۱   مجموعه‌های با یک درجه آزادی ۵۸۵
۱۰ـ۴ـ۲   مجموعه با چند درجه آزادی ۵۹۰
۱۰ـ۵   کاهش تعداد درجات آزادی ۵۹۵

۱۰ـ۵ـ۱ استفاده از تقارن سازه ۵۹۵
۱۰ـ۵ـ۲ سازه‌های با تناوب در چرخش ۵۹۸
۱۰ـ۵ـ۳ حذف درجات آزادی غیرلازم ۶۰۰
۱۰ـ۵ـ۴ تجزیه و تفکیک مؤلفه‌های مود ۶۰۱
مراجع ۶۰۳

فصل یازدهم:

مکانیک غیرخطی سازه‌ها ۶۰۵
۱۱ـ۱ غیرخطی هندسی ۶۰۵
۱۱-۲ غیرخطی رفتار مواد ۶۰۶
۱۱-۳ ترکیبی از غیرخطی هندسی و رفتار مواد ۶۰۶
۱۱-۴ جزء میله ۶۱۲
۱۱-۵ جزء میله خمشی ۶۱۵
۱۱-۶ روشهای دیگر برای محاسبه $[k_G^e]$ ۶۱۷
۱۱-۷ رفتار غیرخطی مواد ۶۲۳
۱۱-۸ مدل ون میزز ۶۲۵
۱۱-۹ رفتار ماده پس از تسلیم ۶۲۸
۱۱-۱۰ کاربرد نظریه ارتجاعی- خمیری مواد در چهارچوب روش اجزاء ۶۳۱
۱۱-۱۱ روش نموی درتحلیل سازه‌ها با رفتار ارتجاعی- خمیری ۶۳۶
۱۱-۱۲ رفتار اجزاء ۶۳۸
۱۱-۱۳ اجزاء تماس ۶۴۰
۱۱-۱۴ ارتعاش سازه‌های غیرخطی (عمومی) ۶۴۱
۱۱-۱۵ ناپایداری دینامیکی ۶۴۴
مراجع ۶۴۶

فصل دوازدهم:

مسائل میدانی تحت شرائط گذرا ۶۴۷
۱۲-۱ معادله دیفرانسیل پاره‌ای ارتعاش شبه هارمونیک ۶۴۷
۱۲-۲ تکرار در مسائل وابسته به زمان ۶۴۹
۱۲-۳ انعکاس ارتعاش ۶۵۰
۱۲-۴ مسائل جفت معادله‌ای ۶۵۹
۱۲-۵ ارتعاش پوسته گنبدی در زیر آب ۶۶۱
۱۲-۶ ارتعاش غیرخطی در زیر آب ۶۶۶
مراجع ۶۷۰

کلمات کلیدی ۶۷۱

پیشگفتار

« معلمی شغل انبیاست.»

درجهان آموزش درک بسیاری از آثار خالق هستی ممکن اما بیان و تفهیم آن اگر غیرممکن نشماریمش کاری است سخت و دشوار! این کار خصوصا اگر آموزش بیننده خودرا به تراز حداقل موردنیاز نرسانده باشد دشوارتر وگاها خالی از بهره‌وری است.

چه بسا برای انجام تکلیف بجاست که معلم لحن خویش را به پائین تراز درک پذیری رسانده تا بر تعداد بهره‌وران افزوده شود.

در مجموعه حاضر به امید افزایش بهره‌وری، تلاش وسیعی در القاء ویژگی های فوق صورت گرفته تا مقابله‌ای با پیچیدگیهای این آثارخداوندی صورت پذیرفته تا با ساده‌ترین بیان، عمق محتوی این آثار به خواننده ارائه گردد.

قالب اصلی کلیه آثارارائه شده تنها نمایشهایی است از قانون اساسی خلقت تحت عنوان **«اصل حفظ پایین‌ترین ترازسطح انرژی»** درکلیه تحولات حرکتی موجودات که به گونه‌های مختلف درچهارچوب ریاضیات بیان شده‌است.

پیشگفتار

« معلمي شغل انبياست.»

درجهان آموزش درك بسياري از آثار خالق هستي ممكن اما بيان و تفهيم آن اگر غيرممكن نشماريمش كاري است سخت و دشوار! اين كار خصوصا اگر آموزش بيننده خودرا به تراز حداقل موردنياز نرسانده باشد دشوارتر وگاها خالي از بهره‌وري است.

چه بسا براي انجام تكليف بجاست كه معلم لحن خويش را به پائين تراز درك پذيري رسانده تا بر تعداد بهره‌وران افزوده شود.

در مجموعه حاضر به اميد افزايش بهره‌وري، تلاش وسيعي در القاء ويژگي هاي فوق صورت گرفته تا مقابله‌اي با پيچيدگيهاي اين آثارخداوندي صورت پذيرفته تا با ساده‌ترين بيان، عمق محتوي اين آثار به خواننده ارائه گردد.

قالب اصلي كليه آثارارائه شده تنها نمايشهايي است از قانون اساسي خلقت تحت عنوان «**اصل حفظ پايين‌ترين ترازسطح انرژي**» دركليه تحولات حركتي موجودات كه به گونه‌هاي مختلف درچهارچوب رياضيات بيان شده‌است.

مقدمه

جايگاه روش اجزاي محدود در زندگي امروزه

روش اجزاي محدود از آثار خلقت الهي است كه در قالب ظرفيت وگنجايش فكر محدود انسان امكان پذيريش بصورت وديعه در اختيار شكافندگان و مصرف‌كنندگان ارزاني داشته شده است.

از ويژگي‌هاي خلقت انسان ناتواني فكر او در پيش‌بيني آينده در قالب نامحدود بوده و اين خود نشانه و بياني حاكي از قدرت پويا ولايتناهي خالق هستي محسوب مي‌گردد.

انسان از ديرباز به طرق مختلف دنبال گسترش دانش خويش در شناخت بهتر و بيشتر عالم هستي بوده است. تاريخ زندگي دانشمندان بيانگر طرق مختلفي است كه دلالت بر معرفي راهكارهاي تجربه شده دراين زمينه مي‌باشد. در طي اين راهكارها انسان عموما ازطريق شناخت آثار خلقت و تحقيق و تفحص درچگونگي اندركنش اين آثار با يكديگر تاحدودي موفق به استفاده مناسب تر از اين ويژگيها درقالب نيازمنديهاي خويش شده‌است. درشاخه‌اي غيرعمومي نيز انسان از طريق تقوي و تقرب به درگاه خلق هستي با نزديك شدن به معبود خويش وگسترش قدرت نيمه الهي خويش پاره‌اي از حقايق و اسرار خلقت را در افكار خود روشن نموده‌است. در اين زمينه آنچه بر نويسنده يقين است آنست كه نتيجه دو بينش درشت و ريز به حقايق در هر دو مسير در يك نقطه وحدانيت همگرا مي‌شود. تنها انحراف ذهني كه در اين مورد به نظر مي‌رسد بخاطر وسعت و تنوع زياد در آثار همراه با ظواهر مختلف آنهاست.

روش‌هاي عددي خصوصا روش اجزاء محدود در اين طيف از ويژگي‌هاي خاصي برخوردار است. با بكارگيري و كمك اين روش بشر توانسته است قبل از طي مسير و يا انجام كار پيش‌بيني‌هايي را براي آينده به تصوير در آورد. البته قانونمندي اين كار مبتني بر تجربيات و آموخته‌هاي وي بوده و هيچ امكاني در پيش‌بيني موارد اتفاقي و آنچه كه قانونمنديش براي انسان روشن نيست مقدور نمي‌باشد. همين امكان با محدوديتهاي بيشمارش باعث تحول بزرگي در زندگي انسان در بيست سال اخير به راه انداخته و باعث گرديده تا هر يك از مسائل زندگي بشر چه فردي و چه جمعي كه نيازمند پيش‌بيني آينده باشد درقالب يك الگوي مناسب شبيه سازي شده و با در نظر گرفتن تمامي عوامل مؤثر بر آن با هر وسعت و گسترشي كه باشد پيش‌بيني لازم صورت پذيرد. اين روش سهولت زيادي را در جهت انجام سريع مطالعات اوليه هركاري فراهم آورده و از نظر اقتصادي و سرعت در تحليل مسائل و از همه مهمتر انجام كارهاي بزرگي كه داراي اندركنشهاي متعدد مي‌باشد ايجاد نموده‌است.

امروزه اين روش الگوسازي نه تنها درشاخه‌هاي مهندسي وپزشكي وسعت چشمگيري پيدا نموده است بلكه به كمك الگوهاي آماري امكان پيش‌بيني آينده جوامع، شهرها، كشورها و ... را در مسائل اجتماعي، اقتصادي، فرهنگي و حتي سياسي

فراهم آورده است. به گونه‌اي كه با اندازه گيري ويژگيهاي موجود در هر مجموعه‌اي و استخراج الگوهاي رياضي آن مي‌توان الگوي تجميع شده‌اي از اندركنش صدها شاخص مؤثر را برنامه ريزي نموده و با در نظر گرفتن شرايط مرزي مختلف (چه آنچه در آينده مورد انتظار است و چه آنچه كه موجود است) را در وضعيت گذرا ويا در شرايط حدي مورد نياز بدست آورد.

پس بسيار بجا و شايسته است كه از اين نعمت بزرگ خداوندي بطور شايسته‌اي در حل معضلات بزرگ اجتماعي، فرهنگي، اقتصادي، مهندسي و پزشكي و ... بهره برده و با صرف انرژي اندك به اطلاعات بزرگ و دقيق دست يافت.

گروه‌بندي مكانيك سازه‌ها

كاربرد روش اجزاء محدود درمكانيك سازه‌ها، همراه باتقسيم پهنه محيط مورد نظر
به تعدادي اشكال هندسي ساده است. هريك از اين تقسيمات يك جزء ناميده شده و امكان پذيري تغيير مكان جزء را مي‌توان درقالب درجات آزادي گره‌هاي هرجزء تعريف نمود. به اين ترتيب هرگره محل تمركز ويژگيهاي مؤثر در مساله بوده كه ناچارا بايستي به شكل معادل مورد محاسبه قرار گيرد. براي مثال مي‌توان نيروهاي گسترده در پهنه جزء، سختي، جرم، ميرايي و ... را نام برد. معادلات تعادل ايستايي و پويايي نيز بطور متمركز در اين گره‌ها ارضاء گرديده و با حل سري معادلات حاصله پاسخها بصورت مقادير گرهي بدست مي‌آيند. با بكارگيري اين مقادير گرهي و استفاده از توابع تغييرات درپهنه اجزاء مي‌توان به يك پاسخ كامل وپيوسته در پهنه سازه دست يافت.

بصورت كلي مسائل مكانيك سازه‌ها را مي‌توان به سه گروه تقسيم نمود:

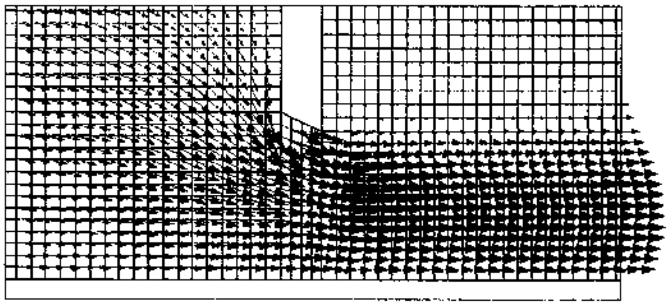
۱- مسائل ايستا يا با شرائط پايا
۲- مسائل مقادير ويژه – بردار ويژه
۳- مسائل گذرا يا پويا

در مسائل نوع اول يك حالت ايستايي ويا عدم تغيير برمساله حاكميت دارد. هدف اصلي دربسياري از مسائل مهندسي دستيابي به چگونگي وضعيت اين حالت ايستا در مسائل مي‌باشد. اين حالت در جريان ثابت عبوري از زير يك دريچه آب (شكل ۱)، حالت پاياي تغيير درجه حرارت درضخامت يك ديوار، حالت ايستاي گسترش يك آلودگي زيرزميني و يا سازه داراي شرائط حركتي ثابت و ... موجود است.

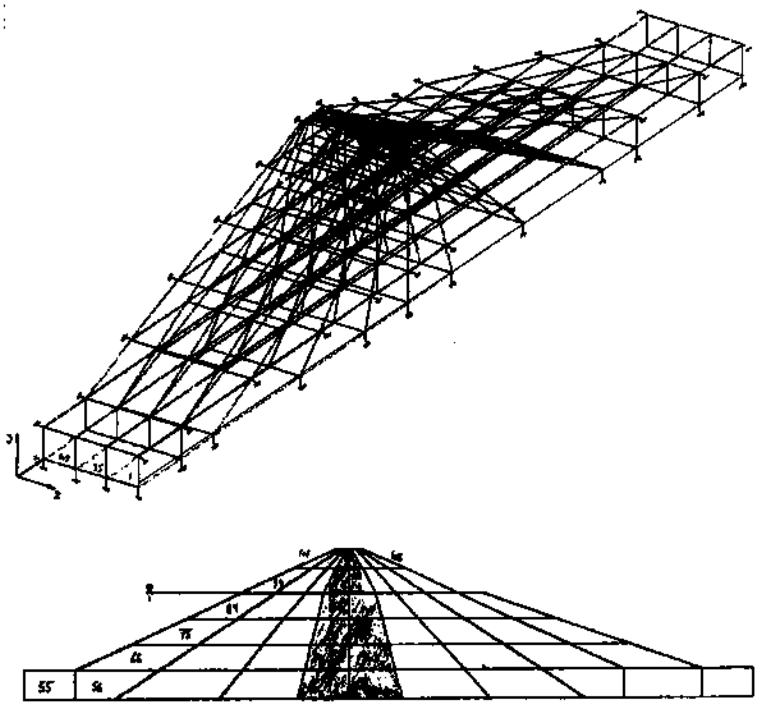
استخراج چگونگي سطح پاياي انرژي در اين نوع مسائل ساده‌ترين راه حل براي پاسخها به حساب مي‌آيد.

لازم به ذكر است كه هدف از تحليل جريان پايا در شكل ۱ تنها حل مسأله در شرايطي است كه ديگر تغييري در هندسه و شرايط مسأله حاصل نگردد. مسلم است

كه در هنگام شروع به باز نمودن دريچه و يا بستن آن و بطوركلي تغيير در وضعيت باز شدگي سطح زير دريچه مسأله حالت پايايي نداشته بلكه در گروه ٣ (مسائل گذرا يا پويا) قرار خواهد گرفت.

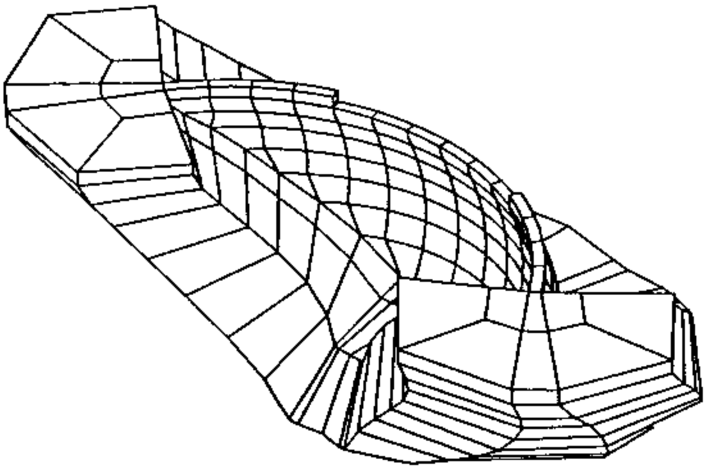


شكل ١- شبكه جريان پايا از زير دريچه



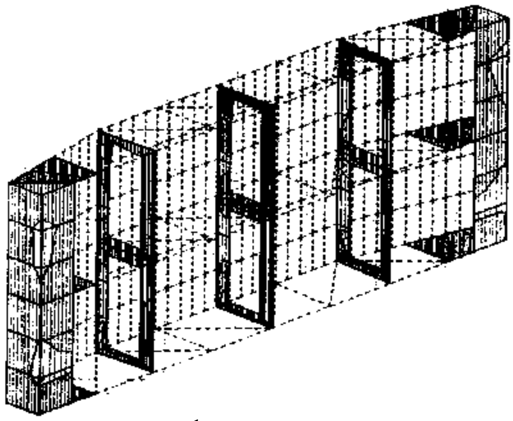
شكل ٢- شبكه مياني يك سد خاكي با هسته رسي

در شكل ٢ شبكه عددي تحليل سه بعدي بخش مياني يك سد خاكي ارائه شده است. در صورتيكه بارگذاري ثابتي براي اين قطعه از سد خاكي در نظر گرفته شود مسأله حالت پايا داشته در حاليكه اگر اين سازه تحت اثر بارهاي متغير مانند زلزله يا تغيير سطح آب سد قرار گيرد مسأله از نوع پويا خواهد بود.



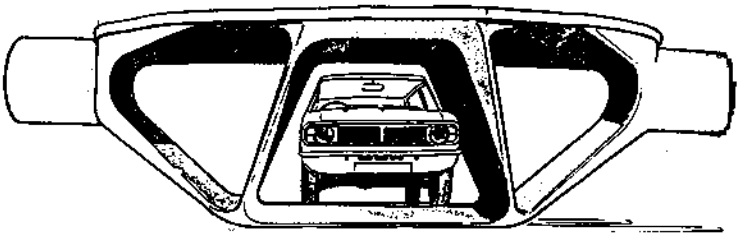
شكل ۳- شبكه يك سد بتني همراه با پي مربوطه

شكل ۳ شبكه‌اي از بدنه سد بتني همراه با بخشهاي مؤثر ديواره نگهدارنده و پي سد است كه طبيعتاً مانند شكل ۲ مي‌تواند مورد تحليل پايا و يا پويا (بسته نوع بارگذاري) قرار گيرد.



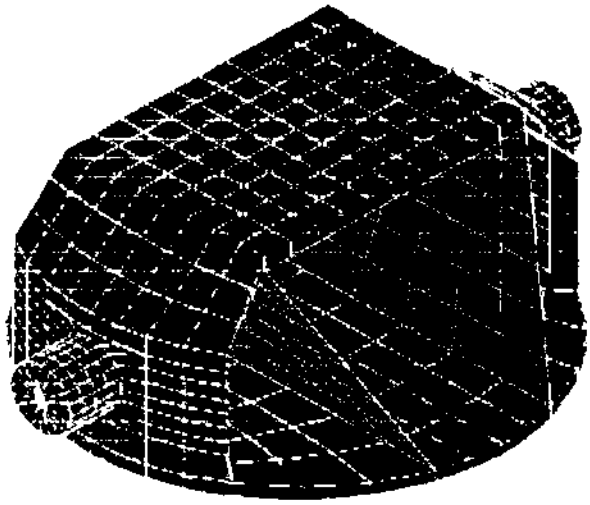
شكل ۴- شبكه يك دريچه آشغالگير در مدخل آبراهه

شكل ۴ نمونه‌اي از يك دريچه آشغالگير است. چون در اين نوع سازه از بخشهاي مهم بررسي چگونگي ارتعاش دريچه در برابر نيروهاي كشنده جريان آب و جلوگيري از حالت تشديد مي‌باشد لازم است وضعيت ارتعاشي سازه در مودهاي ارتعاشي مختلف همراه با زمانهاي متناوب ارتعاش طبيعي دريچه مورد بحث قرار گيرد. اين نوع تحليل در گروه ۲ قرار مي‌گيرد.



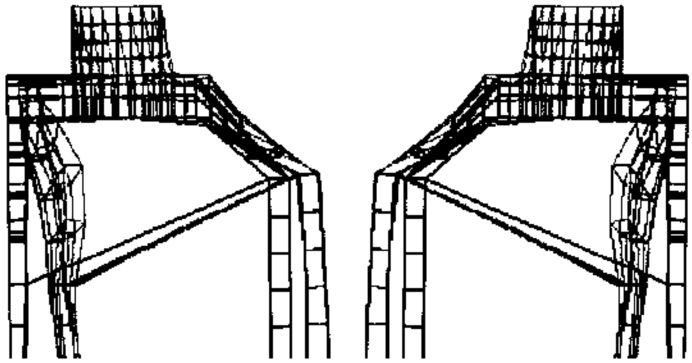
شكل ۵- پولك شير پروانه‌اي

شكل ۵ پولك يك شير پروانه‌اي بزرگ را نشان مي‌دهد. شكل ۶ همين پولك را در حالت شبكه‌بندي شده براي تحليل عددي نشان مي‌دهد. در تحليل اينگونه مسائل شرايط گوناگون بارگذاري و بررسي وضعيت ارتعاشي اين پولك در حين عملكرد مورد نظر خواهد بود، بنابراين ممكن است هر سه نوع تحليل سازه‌اي در مورد اين سازه بكار گرفته شود.

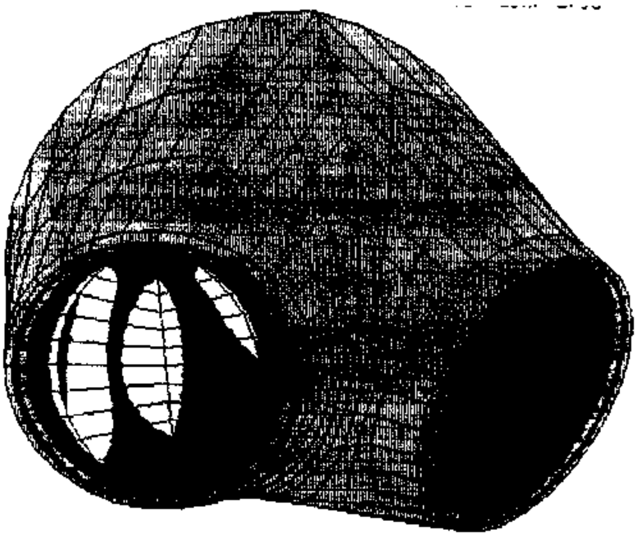


شكل ۶- شبكه پولك شيرپروانه‌اي

شكل ۷ پولك دريچه را در اثر اعمال فشار آب ناشي از ضربه قوچ نشان مي‌دهد.



شكل ۷- شكل تغييريافته پولك شير پروانه‌اي تحت فشار آب

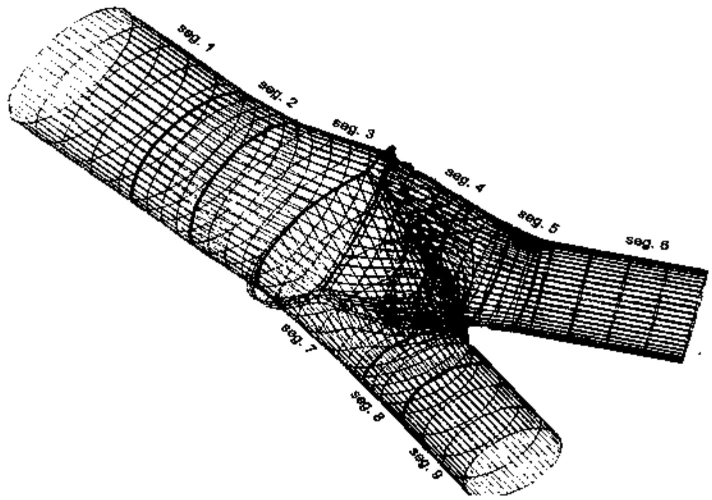


شكل ۸- شبكه جريان آب پايا در دو شاخه

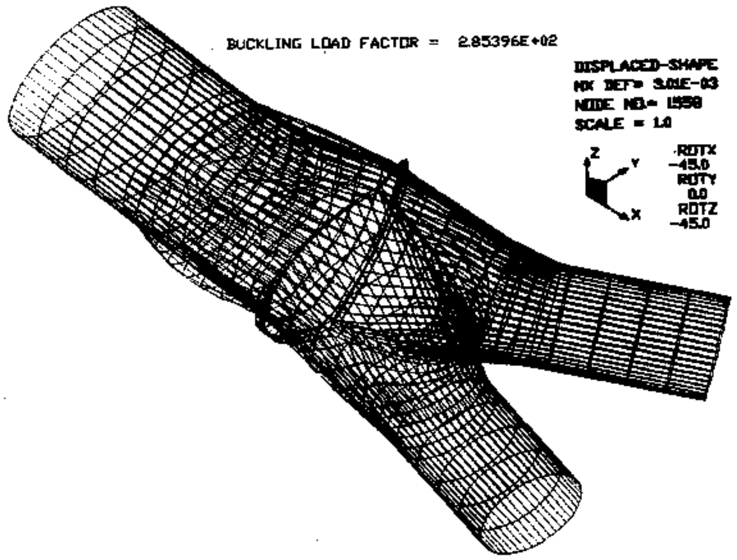
شكل ۸ بخشي از يك دو شاخه در آبراهه منتهي به توربين را نشان مي‌دهد. در اين سازه نيز در مرحله اول حالتهاي پايا با در نظر گرفتن بارگذاريهاي ثابت مورد تحليل قرار گرفته و در مرحله دوم حالتهاي گذراي جريان آب و بالاخره شرايط ارتعاش طبيعي صفحه سخت كننده داخلي مورد بحث قرار خواهد گرفت. نتايجي از اين گونه تحليل در شكلهاي ۱-۹ تا ۶-۹ نشان داده شده است.

بحث و بررسي و روش تحليل مسائل ايستايي عمدتا در مرجع ۳ فصل ۱۱ آمده است.

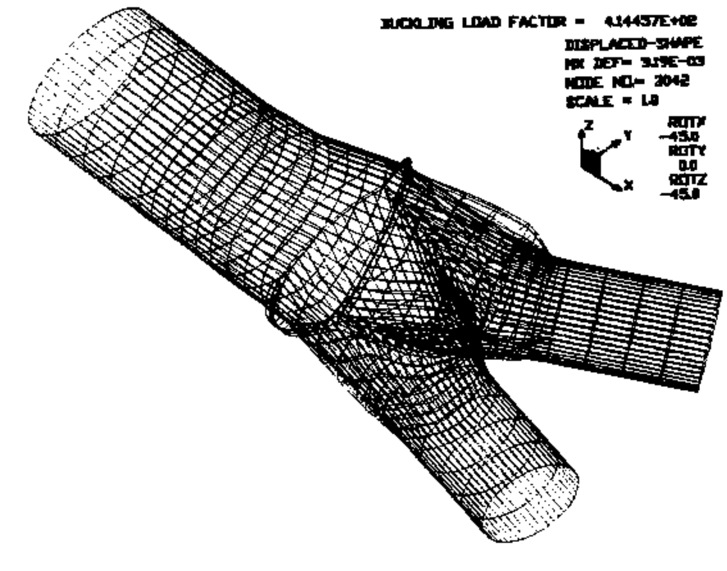
نوع دوم تحليل مسائل سازه‌اي در اين كتاب بطور مفصل با توجه به اجزاء گوناگون مورد بحث و بررسي قرار خواهد گرفت. در اين گونه مسائل مودهاي ارتعاشي سازه همراه با فركانسها و زمان تناوب مربوطه محاسبه مي‌شوند. ارائه شكلهاي مختلف مودهاي ارتعاشي سازه‌ها و ناپايداري‌هاي مربوطه در اين بحث قرار مي‌گيرند.



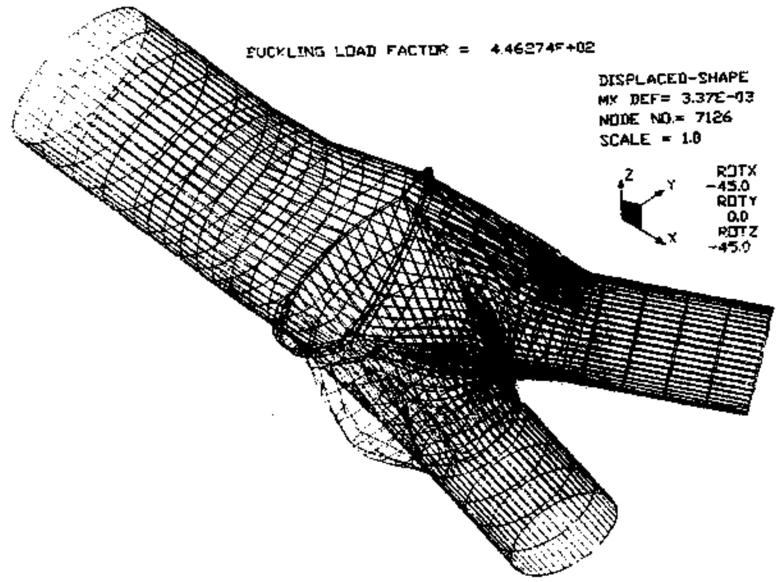
شكل ۹- پوسته يك دو شاخه تحت فشارهاي داخلي و خارجي



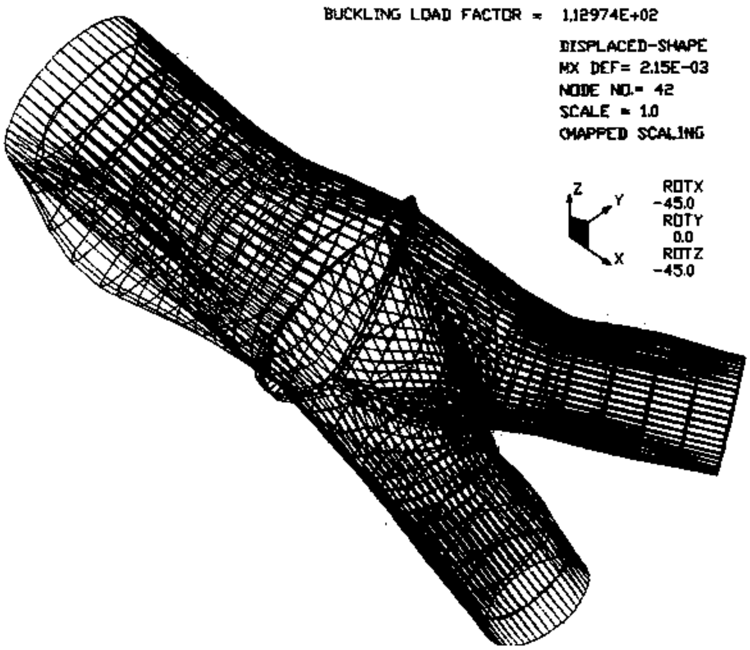
شكل ۱-۹- مود اول كمانش پوسته دو شاخه تحت فشارهاي خارجي



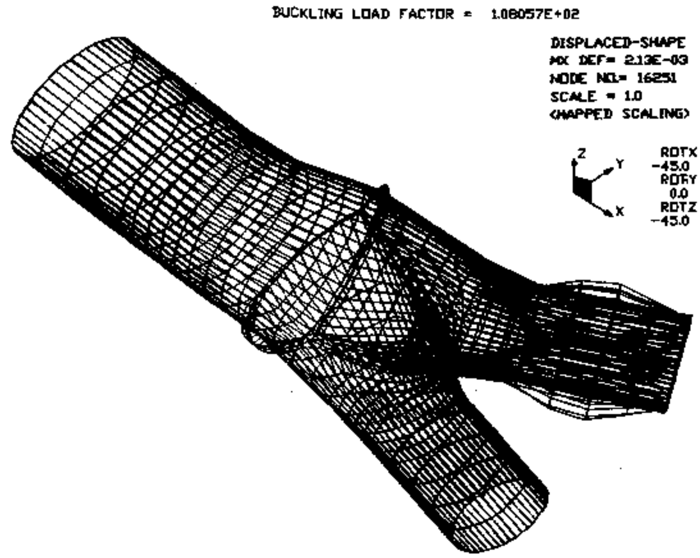
شكل ۲-۹- مود دوم كمانش پوسته دو شاخه تحت فشارهاي خارجي



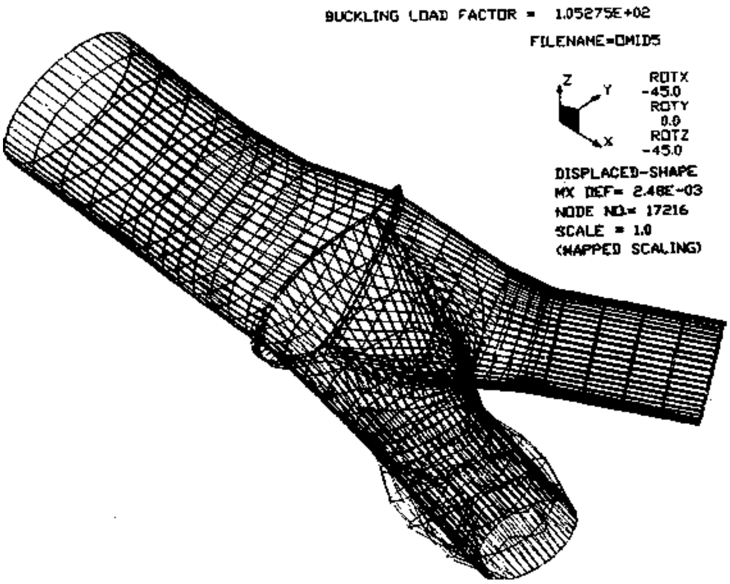
شكل ۳-۹- مود سوم كمانش پوسته دو شاخه تحت فشارهاي خارجي



شكل ۴-۹- مود چهارم كمانش پوسته دو شاخه تحت فشارهاي خارجي



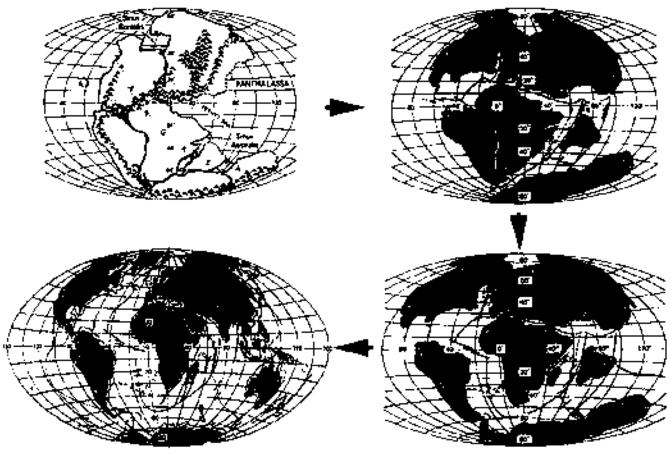
شكل ۵-۹- مود پنجم كمانش پوسته دو شاخه تحت فشارهاي خارجي



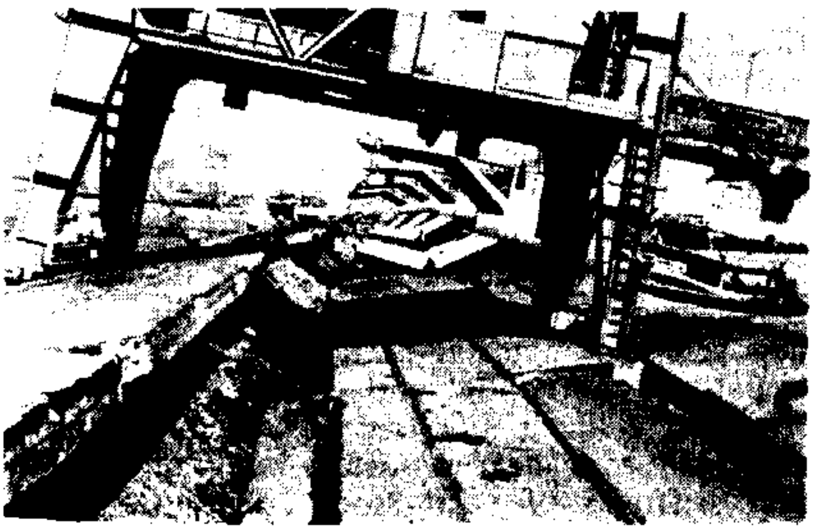
شکل ۶-۹- مود ششم کمانش پوسته دو شاخه تحت فشارهاي خارجي

مسائل پويا يا تحت شرايط گذرا مسائلي با شرايط ديناميکي مي‌باشند که با زمان مقادير فراسنجهاي حرکتي در آنها تغيير مي‌نمايد. شرايط گذراي کليه مسائل ديناميک در اين گروه قرار مي‌گيرد.

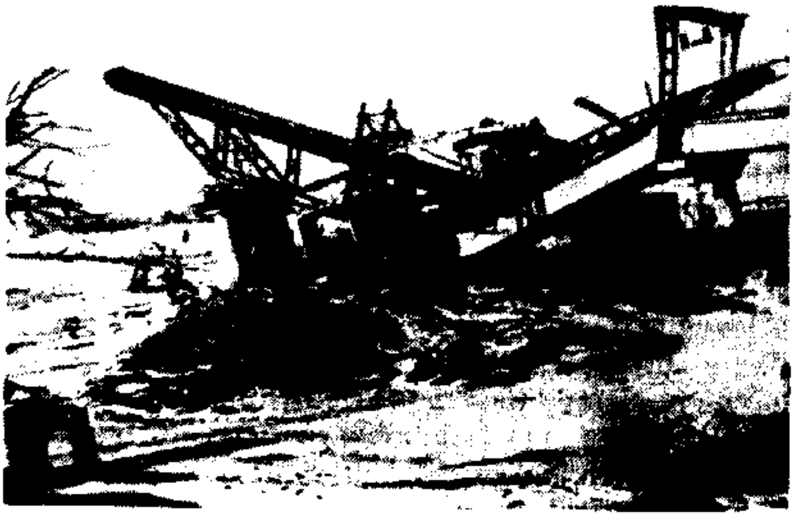
لازم به ذکر است که همه چيز و هر مخلوقي در عالم در معرض آثار و عوامل گذراست. شکل ۱۰ بيانگر اين واقعيت است. تعريف حالت پايا از مصنوعيات ذهن بشر است. از آثار عيان اين حالتها مي‌توان آثار زلزله بر روي سازه‌ها را در شکلهاي ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ بصورت نمونه ارائه شده را نشان داد. وال... اعلم



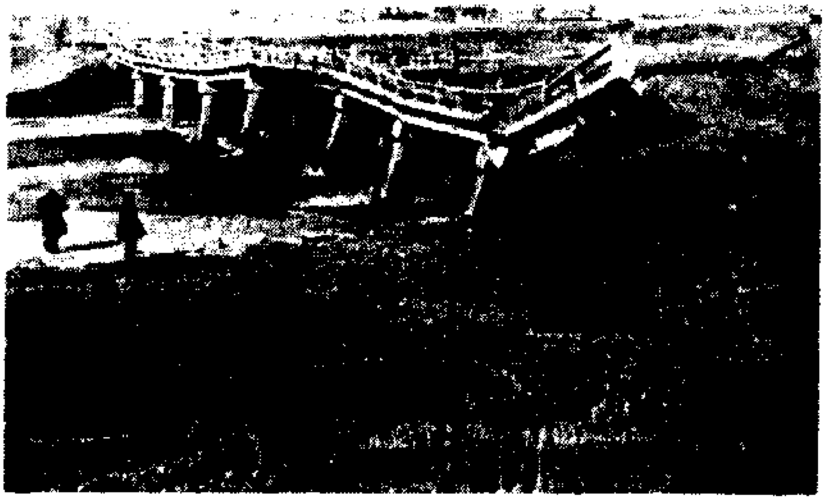
شكل ۱۰- تغييرات آرايش پوسته كره زمين در طول دورانها از بدو خلقت



شكل ۱۱- خرابي بندر در شيلي (زلزله ۱۹۸۵)



شکل ۱۲- خرابي پل در چين (زلزله ۱۹۷۵)



شکل ۱۳- خرابي پل در چين (زلزله هايچنگ ۱۹۷۵)

فصل اول

روابط حاكم بر معادلات حركت

۱-۱- تعادل ديناميكي

معادلات حاكم بر ارتعاش سازه‌ها مبتني بر معادلات عمومي حركت ديناميكي است. اهميت ويژه در نگارش اين روابط دقت در جزئيات و صحت روابط نوشته شده مي‌باشد. معادلات حاكم بر حركت ديناميكي هر مجموعه مبتني بر قانون دوم نيوتن براي حركت اجسام بوده كه اساس آن برابري تغييرات زماني مقدار حركت (ممنتوم) يك جرم با مجموعة نيروي وارد به آن مي‌باشد.

در صورتيكه جرم m تغيير مكان $\delta(t)$ را در اثر نيروي $f(t)$ (بصورت تابع زمان) همانند شكل ۱-۱ انجام دهد، قانون دوم نيوتن در مورد حركت آن بصورت زير قابل بيان است:

$$\frac{d}{dt}[m\frac{d\delta(t)}{dt}] = f(t) \tag{۱-۱}$$

در صورتي كه تغييراتي براي جرم m متصور نباشد اين معادله بصورت زير خلاصه مي‌گردد:

$$m\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = f(t) \tag{۱-۲}$$

و يا:

$$m\ddot{\delta} = f(t) \tag{۱-۳}$$

در معادلة فوق نقطه(${}^{\circ}$) به معني تمو متغير نسبت به زمان است.

[redacted]

شكل ١-١- حركت جرم منفرد m

معادله ٣-١ را مي توان بصورت زير نوشت:

$$f - m\ddot{\delta} = 0 \qquad (١-٤)$$

با در نظر گرفتن جملة $-m\ddot{\delta}$ بصورت بار معادل ناشي از شتاب بر روي جرم m كه همان نيروي ماند مي باشد، مي توان معادلة فوق را معادله تعادل ديناميكي جرمm دانست كه مفهوم آن برابري جمع نيروهاي وارد بر جرم m با صفر مي باشد. جهت عملكرد نيروي ماند برخلاف جهت شتاب $\ddot{\delta}$ بوده و تعادل فوق همانند تعادل استاتيكي نيروهاست.

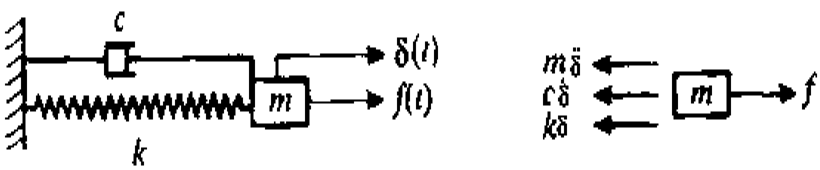
مثال ١-١: *معادله حركت يك جرم منفرد همراه با يك فنر و يك ميراگر را مطابق شكل (**a**٢-١) بنويسيد.*

حل- *نيروهاي وارد بر جرم منفرد شامل نيروي خارجيf و نيروي ذخيره شده در فنر $K\delta$ و نيروي حاصل از اثر سرعت ميراگر $c\dot{\delta}$ و نيروي ماند $m\ddot{\delta}$ مي باشد. جهت اين نيروها در شكل (**b**٢-١) نشان داده شده است. معادله تعادل نيروها بصورت زير نوشته مي شود:*

$$-m\ddot{\delta} - c\dot{\delta} - k\delta + f = 0 \qquad (١-٥)$$

اين معادله بصورت تعادل نيروهاي داخلي و خارجي مجموعه بصورت زير قابل تنظيم است:

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + k\delta = f \qquad (١-٦)$$



(a) (b)

شکل۲-۱- مجموعه جرم منفرد m بافنر k ومیراگر c

مفهوم تعادل نيروها در مجموعة جرم منفرد فوق را مي‌توان به يك مجموعه با درجات آزادي متعدد همراه با N جرم متمركز تعميم داد. معادلة حركت ديناميكي در اين حالت بصورت صفر بودن جمع نيروها و گشتاورهاي مختلف بر روي مجموعه هر جرم متمركز خواهد بود. اين معادلات بصورت زير نوشته مي‌شوند:

$$\underset{\sim}{f}_j - \frac{d}{dt}(m_j \overset{\circ}{\underset{\sim}{\delta}}_j) = 0 \quad ; j = 1,2,.......N \qquad (۱\text{-}۷)$$

$$\underset{\sim}{L}_j - \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{J}_j) = 0 \quad ; j = 1,2,.......N \qquad (۱\text{-}۸)$$

در معادلات فوق δ_j تغييرمكان جرم m_j و f_j بيانگر مجموعة نيروهاي وارده و نماينده مقادير حركت (ممنتوم) و L_j نيز ارائه‌گر مجموعة گشتاورهاي وارده مي‌باشند. در صورتي كه بردار δ_j باعث ايجاد حركتهاي غير وابسته نگردد، معادلات (۱-۷) و (۱-۸) بصورت محدود به شكل زير قابل بيان است:

$$g(\underset{\sim}{\delta}_1, \underset{\sim}{\delta}_2, ...\underset{\sim}{\delta}_N) = 0 \quad ; j = 1,2,........mm \qquad (۱\text{-}۹)$$

در معادله فوق mm تعداد محدوديتها بوده و اين مطلب در فصل (۵-۱) مورد بحث واقع خواهد شد.

مثال ۲-۱: *معادلة حركت مجموعة نشان داده شده در شكل (۳-۱) را بنويسيد.*

شكل ۳-۱- مجموعه اي از سه فنر و سه جسم متمركز

حل: جرم m۱ متحمل دو نيرو در اثر فنرهاي k۱ و k۳ كه به آن متصل بوده و از طرف ديگر به جرمهاي m۲ و m۳ وصل شده اند مي‌باشد.

در صورتيكه بردار موقعيت جرمهاي m۱ و m۲ به ترتيب با $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ نشان داده شوند، بردار يكة $\vec{n_1}$ را مي توان در طول خط ۱-۲ بصورت زير تعريف مي‌شود:

$$\vec{n_1} = \frac{1}{L_1}(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \qquad (۱-۱۰)$$

$$L_1 = abs(\vec{r_1} - \vec{r_2})$$

در صورتيكه تغييرمكانهاي m۱ و m۲ به ترتيب با δ۱ و δ۲ مشخص شوند، تغييرمكان فنر بين m۱ و m۲ از حاصلضرب عددي (اسكالر) زير بدست مي‌آيد:

$$e_1 = (\vec{\delta_1} - \vec{\delta_2}).\vec{n_1} \qquad (۱-۱۱)$$

عملكرد سختي فنر k ۱ و نيروي f ۱ بر روي جرم m ۱ در جهت $\vec{n_1}$ بصورت زير است:

$$f_1 = -k_1 e_1 = k_1(\vec{\delta_2} - \vec{\delta_1}).\vec{n_1} \qquad (۱-۱۲)$$

به همين روش نيروي f ۳ كه بر روي جرم m ۱ در جهت $\vec{n_3}$ عمل مي نمايد بصورت زير خواهد بود:

$$f_3 = k_3(\vec{\delta_3} - \vec{\delta_1}).\vec{n_3} \qquad (۱-۱۳)$$

$$\vec{n_3} = \frac{1}{L_3}(\vec{r_1} - \vec{r_3}) \qquad (۱-۱۴)$$

$$L_3 = abs(\vec{r_1} - \vec{r_3})$$

نتيجتاً معادلة تعادل نيروهاي وارده به جرم m۱ بصورت زير قابل ارائه است:

$$\vec{f_1}\,\vec{n_1} + \vec{f_3}\,\vec{n_3} - m\,\overset{\circ\circ}{\underset{\sim}{\delta_1}} = 0 \qquad (۱-۱۵)$$

با قرار دادن مؤلفه‌هاي هر بردار در معادلة فوق دو معادله ساده بدست مي‌آيد. اين معادلات مشابه تعادل جرم در مثال (۱-۱)، معادله حركت جرم m۱ را ارائه خواهد نمود. به روش مشابه مي‌توان معادلات حركت جرمهاي m۲ و m ۳ را بدست آورد.

۱-۲- اصول حاكم بر روش تغيير مكان مجازي

تحليل يك سازه نسبتاً پيچيده و در نظر گرفتن بردار نيروهائي كه بر هر جرم عمل مي‌نمايند با كاربرد اصل دآلمبرت (*Alembert*) در قالب تغيير مكان مجازي قابل اجراست.

بر اساس اصل تغيير مكان مجازي، نمو انرژي حاصل از نيروهاي عمل‌كننده بر يك سيستم با تغيير مكان مجازي برابر صفر مي‌باشد. البته تغيير مكان مجازي فرضي، لازم است از نظر فيزيكي ممكن بوده و شرائط همسازي را همراه با شرائط حدي مسأله ارضاء نمايد.

مثال ۳-۱: *با بكارگيري روش تغيير مكانهاي مجازي، معادلات حركت سيستم نشان داده شده در شكل (۲-۱) را بدست آوريد.*

حل: در شكل (**b**۲-۱) نيروهاي مؤثر بر مجموعه پس از كاربرد اصلي المبرت نشان داده شده است. در صورتي كه تغيير مكان مجازي $\Delta\delta$ براي مجموعه منظور گردد، مي توان نوشت:

$$-m\overset{\circ\circ}{\delta}\Delta\delta - c\overset{\circ}{\delta}\Delta\delta - k\,\delta\Delta\delta + f\Delta\delta = 0 \qquad (۱\text{-}۱۶)$$

اين رابطه بصورت زير قابل تغيير است:

$$(-m\overset{\circ\circ}{\delta} - c\overset{\circ}{\delta} - k\,\delta + f)\Delta\delta = 0 \qquad (۱\text{-}۱۷)$$

با فرض اختياري بودن انتخاب تغيير مكان مجازي $\Delta\delta$ و غير صفر بودن آن لازم است:

$$m\overset{\circ\circ}{\delta} + c\overset{\circ}{\delta} + k\,\delta = f \qquad (۱\text{-}۱۸)$$

از محاسن كار با روش تغيير مكان مجازي آنست كه معادلات انرژي بصورت عددي (اسكالر) نوشته مي شوند. كاربرد اين روش براي يك مجموعه با درجات آزادي متعدد، معادله تعادل كلي نموّ انرژي را بصورت زير درمي آورد:

$$\sum_{j=1}^{N}\{\underset{\sim}{f}_j - \frac{d}{dt}(m_j\,\underset{\sim}{\overset{\circ}{\delta}_j})\}.\Delta\underset{\sim}{\delta}_j + \sum_{j=1}^{N}\{\underset{\sim}{L}_j - \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{J_j})\}.\Delta\underset{\sim}{\theta_j} = 0 \qquad (۱\text{-}۱۹)$$

در رابطه فوق $\Delta\delta_j$ بردار تغيير مكان مجازي $\Delta\theta_j$ بردار چرخشهاي مجازي مي باشند. در هر صورت با توجه به اختياري بودن مقادير دو بردار فوق معادلات (۱-۷) و (۱-۸) بايستي ارضاء گردند.

۱-۳- اصل هميلتون (***Hamilton***)

اگرچه روش تغيير مكان مجازي قادر به تحليل مسائل با متغيرهاي برداري نيرو است امّا روش كار مجازي هم با معادلات عددي (اسكالر) قادر به تحليل و ارائه مقادير برداري نيروها و تغييرمكانهاست. اين كارآيي با بكارگيري اصل هميلتون عددي معادلات حركت امكان پذير مي‌گردد.

جرم m تحت اعمال نيروي f_T تغيير مكان δ را مطابق شكل (٤-١) داده است. f_T نماينده كليه نيروهاي دائم و غيردائم است. كار انجام شده در اثر نيروهاي دائم بر روي يك جرم متحرك بستگي به نقطه ابتدا و انتهاي تغيير مكان بستگي داشته و به مسير حركت بستگي ندارد. امّا كار انجام شده در اثر نيروهاي غير دائم به مسير حركت بين دو نقطه بستگي دارد. نيروهاي غيردائم عموماً باعث اتلاف انرژي بصورتهاي اصطكاك و يا نيروهاي جداكنندة انرژي از مجموعه مانند نيروهاي خارجي مي باشند.

كار انجام گرفته توسط نيروهاي دائمي را مي توان از تغييرات انرژي پتانسيل بدست آورد. انرژي پتانسيل $\Pi(\underset{\sim}{r})$ بستگي به موقعيت $\underset{\sim}{r}$ داشته و بصورت كار انجام شده توسط نيروهاي دائمي $\underset{\sim}{f}$ در اثر حركت يك جرم از يك موقعيت $\underset{\sim}{r}$ به موقعيت مبناي $\underset{\sim}{r_o}$ مي باشد. در اين مورد مي‌توان نوشت:

$$\Pi(\underset{\sim}{r}) = \int_{\underset{\sim}{r}}^{\underset{\sim}{r_o}} \underset{\sim}{f} \,.\, d\,\underset{\sim}{r} \qquad (١-٢٠)$$

شكل ٤-١- حركت يك جرم منفرد

كار انجام شده توسط نيروهاي دائمي $\underset{\sim}{f}$ بر روي يك جرم متحرك از موقعيت $\underset{\sim}{r_1}$ به $\underset{\sim}{r_2}$ مطابق شكل (١-٥) بصورت زير مي باشد:

$$W = \int_{\underset{\sim}{r_1}}^{\underset{\sim}{r_2}} \underset{\sim}{f} \,.\, d\,\underset{\sim}{r} = \int_{\underset{\sim}{r_1}}^{\underset{\sim}{r_o}} \underset{\sim}{f} \,.\, d\,\underset{\sim}{r} - \int_{\underset{\sim}{r_o}}^{\underset{\sim}{r_2}} \underset{\sim}{f} \,.\, d\,\underset{\sim}{r} = -\{\Pi(\underset{\sim}{r_2}) - \Pi(\underset{\sim}{r_1})\} \qquad (١-٢١)$$

با توجه به دائمي بودن نيرو، كار انجام شده مستقل از مسير حركت بوده و مسير نشان داده شده در شكل (۵-۱) بصورت گذر از نقطه مرجع ۰ در نظر گرفته شده است.

شكل ۵-۱- مسير حركت بوسيله جرم

معادله (۲۱-۱) بيانگر آنست كه كار انجام شده توسط نيروهاي دائمي با علامت منفي تغييرات انرژي پتانسيل ارتباط دارد. اين موضوع در قالب نمّوي بصورت زير نوشته مي‌شود:

$$\Delta W = -\Delta \Pi \qquad (۱-۲۲)$$

نوع انرژي پتانسيل مورد بحث در اصل انرژي پتانسيل ارتجاعي و يا انرژي كرنشي U مي‌باشد. در صورتي كه فنر خطي با سختي k تغيير طولي برابر δ داشته باشد، نيروي f در اين فنر در جهت δ بوده و مي‌توان نوشت:

$$f = -k\delta \qquad (۱-۲۳)$$

انرژي داخلي در اين حالت بصورت زير است:

$$U = \int_{\delta}^{o} f\Delta\delta = \int_{\delta}^{o} k\delta\Delta\delta = (1/2)k\delta^2 \qquad (۱-۲٤)$$

با كاربرد اصل تغيير مكانهاي مجازي براي مجموعه نشان داده شده در شكل (٤-۱) مي‌توان نوشت:

$$f_1\Delta\delta - m\overset{\circ\circ}{\delta}\Delta\delta = 0 \qquad (۱-۲۵)$$

در رابطه فوق $\Delta\,\delta$ تغيير مكان مجازي است. حال مي‌توان نوشت:

$$f_T\Delta\delta = \Delta W \qquad (۱-۲٦)$$

$$m\overset{\circ\circ}{\delta}\Delta\delta = m\frac{d}{dt}(\overset{\circ}{\delta}\Delta\delta) - m\overset{\circ}{\delta}\Delta\delta \qquad (۱-۲۷)$$

با فرض اينكه:

$$\frac{d}{dt}(\Delta\delta) = \Delta(\frac{d\delta}{dt}) = \Delta\mathring{\delta}$$

معادله (۱-۲۷) بصورت زير درمي آيد:

$$m\ddot{\delta}\,\Delta\delta = m\frac{d}{dt}(\mathring{\delta}\,\Delta\delta) - \Delta(\frac{1}{2}m\mathring{\delta}^2) = m\frac{d}{dt}(\mathring{\delta}\,\Delta\delta) - \Delta T \qquad (۱\text{-}۲۸)$$

$$T = \frac{1}{2}m\mathring{\delta}^2 \qquad (۱\text{-}۲۹)$$

در حاليكه T انرژي جنبشي[1] است.
با قراردادن معادله (۱-۲۶) و (۱-۲۸) در معادله (۱-۲۵) مي توان نوشت:

$$\Delta W - m\frac{d}{dt}(\mathring{\delta}\,\Delta\delta) + \Delta T = 0$$

و يا:

$$\Delta T + \Delta W = m\frac{d}{dt}(\mathring{\delta}\,\Delta\delta) \qquad (۱\text{-}۳۰)$$

در صورتيكه موقعيت جرم متحرك در دو موضع زماني $t_۱$ و $t_۲$ معلوم باشد، حركت در فاصله ياد شده بوسيله سختي مطابق شكل (۱-٦) قابل ارائه است. منحني ارائه شده شديداً وابستگي به زمان داشته و با اندك تغيير در زمانها منحني جديدي حاصل خواهد گرديد. امّا در صورتي كه در طي مسيرها در دو حالت، اختلاف زماني وجود نداشته باشد، مسير يگانه بوده و دو مسير بر هم منطبق مي باشند. يعني در $t = t_۱$ و $t = t_۲$:

$$\Delta\delta = 0 \qquad (۱\text{-}۳۱)$$

مسأله اصلي در اين حالت انتخاب مسير از $\delta_۱$ به $\delta_۲$ بصورت آنچه در طبيعت ممكن است مي باشد.

---

[1] Cinetic-

شكل ٦-۱- تغيير حركت يك جرم

با ضرب معادله (۳۰-۱) در dt و انتگرال گيري بين دو زمان t_1 و t_2 معادله زير را مي توان بدست آورد:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta T+\Delta W)dt=\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}(\mathring{\delta}\,\Delta\delta)\,dt=[m(\mathring{\delta}\,\Delta\delta)]_{t_1}^{t_2}=0 \qquad (۱\text{-}۳۲)$$

اساس معادله فوق در اصل بصورت زير مي باشد:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta T+\Delta W)dt=0 \qquad (۱\text{-}۳۳)$$

با توجه به جدا نمودن نيروها بصورت دائمي و غيردائمي، براي انرژي نيز مي‌توان نوشت:

$$\Delta W=\Delta W_C+\Delta W_{nC} \qquad (۱\text{-}۳٤)$$

باكاربرد معادله (۲۲-۱) مي توان نوشت:

$$\Delta W_C=-\Delta\prod \qquad (۱\text{-}۳۵)$$

معادله (۲۲-۱)ر انيز مي توان بصورت زيربيان نمود:

$$\Delta W=-\Delta\prod+\Delta W_{nC} \qquad (۱\text{-}۳۶)$$

با جايگزيني عبارت (٣٦-١) در رابطه (٣٣-١) معادله زير بدست مي‌آيد:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta T-\Delta\prod+\Delta W_{nC})dt=0 \qquad (۱\text{-}۳۷)$$

و يا :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta(T-\prod)+\Delta W_{nC})dt=0 \qquad (۱\text{-}۳۸)$$

لازم به ذكر است كه معادله (٣٧-١) را نمي توان بصورت زير نوشت. زيرا بخش انرژي W_{nc} براي نيروهاي غيردائمي وجود ندارد. در صورتيكه كار مجازي بايستي هميشه قابل محاسبه باشد.

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta(T - \prod + W_{nC})dt = 0 \qquad (۱-۳۹)$$

معادله (۱-۳۸) در اصل بيان رياضي اصل هميلتون مي باشد. براي يك سيستم دائمي $\Delta W_{nc} = 0$ مي باشد. در اين حالت معادله ياد شده بيانگر انتگرال عبارت ($T-\Pi$) است كه در طول مسير زماني مقداري ثابت است. مي‌توان نشان داد كه اين مقدار ثابت در اصل يك حداقل نيز مي‌باشد.

كاربرد اصل يادشده اساساً ارائه كنندة معادله حركت يك مجموعه مي باشد. اين روش در مورد يك مجموعه مستقل و يا يك مجموعه با چند درجه آزادي قابل استفاده مي باشد. از مشخصه هاي مهم اين روش امكان نوشتن معادلات در قالب عددي است. در حالت لزوم نوشتن تعادل نيروهاي غيردائمي گاهاً معادلات بصورت برداري نوشته مي شوند. بنابراين در قالب تحليل سازه ها با مواد ارتجاعي، اصل هميلتون هميشه بصورت رابطه زير بيان مي گردد:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta(T - U) + \Delta W_{nC})dt = 0 \qquad (۱-٤۰)$$

مثال ٤-۱: *با بكارگيري اصل هميلتون معادله حركت مطابق آنچه در شكل (۲-۱) نشان داه شده را بدست آوريد:*

حل:

$$T = \frac{1}{2}m\overset{\circ}{\delta}^2,\ U = \frac{1}{2}k\delta^2,\ \Delta W_{nc} = f\Delta\delta - c\overset{\circ}{\delta}\Delta\delta \qquad (۱-٤۱)$$

با جايگزيني در معادله (۱-٤۰) مي توان نوشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta(\frac{1}{2}m\overset{\circ}{\delta}^2 - \frac{1}{2}k\delta^2)dt + \int_{t_1}^{t_2} (f\Delta\delta - c\overset{\circ}{\delta}\Delta\delta)dt = 0 \qquad (۱-٤۲)$$

يعني:

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\overset{\circ}{\delta}\Delta\overset{\circ}{\delta} - k\delta\Delta\delta + f\Delta\delta - c\overset{\circ}{\delta}\Delta\delta)dt = 0 \qquad (۱-٤۳)$$

با فرض: $\Delta\overset{\circ}{\delta} = \Delta(\frac{d\delta}{dt}) = \frac{d}{dt}(\Delta\delta)$

با انتگرال‌گيري جزء به جزء از جمله اول مي توان نوشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\overset{\circ}{\delta}\Delta\overset{\circ}{\delta}dt - [m\overset{\circ}{\delta}\Delta\delta]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\overset{\circ\circ}{\delta}\Delta\delta dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\overset{\circ\circ}{\delta}\Delta\delta dt \qquad (۱-٤٤)$$

با جايگذاري معادله (۱-٤٤) در معادله (۱-٤۳) معادله زير نتيجه مي شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\overset{\circ\circ}{\delta} + c\overset{\circ}{\delta} + k\delta)\Delta\delta dt = 0 \qquad (۱-٤٥)$$

با توجه به انتخابي بودن مقدار $\Delta\delta$ شرط ارضاء معادله فوق بصورت زير است:

$$m\overset{\circ\circ}{\delta}+c\overset{\circ}{\delta}+k\delta = f \quad (۱-٤٦)$$

۱-۴- معادلات لاگرانژ

كاربرد اصل هميلتون در تحليل يك مجموعه مجزا را مي توان بروش ساده تري نيز بيان نمود. براي مثال مي توان مجموعه نشان داده شده در شكل (۲-۱) را درنظرگرفت. انرژي هاي جنبشي و كرنشي در اين مجموعه بصورت زير مي باشند:

$$T = \frac{1}{2}m\overset{\circ}{\delta}^2 = T(\overset{\circ}{\delta}),\ U = \frac{1}{2}k\delta^2 = U(\delta) \quad (۱-٤٧)$$

كار مجازي حاصله در اثر نيروهاي غيردائمي نيز بصورت زير است:

$$\Delta W_{nc} = (f - c\overset{\circ}{\delta})\Delta\delta \quad (۱-٤٨)$$

معادله (۱-٤٠) در اين حالت بصورت زير نوشته مي شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\frac{\partial T}{\partial\overset{\circ}{\delta}}\Delta\overset{\circ}{\delta} - \frac{\partial U}{\partial\delta}\Delta\delta + (f - c\overset{\circ}{\delta})\Delta\delta\}dt = 0 \quad (۱-٤٩)$$

با انتگرال‌گيري جزء به جزء نتيجه زير حاصل مي‌گردد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial\overset{\circ}{\delta}}\Delta\overset{\circ}{\delta dt} = [\frac{\partial T}{\partial\overset{\circ}{\delta}}\Delta\delta]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\overset{\circ}{\delta}})\Delta\delta dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\overset{\circ}{\delta}})\Delta\delta dt \quad (۱-٥٠)$$

روش بدست آوردن معادله فوق بر اساس معادله (۱-۳۱) است. با جايگزيني اين معادله در معادله (۱-٤٩) مي توان نتيجه گرفت:

$$\int_{t_1}^{t_2} \{-\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\overset{\circ}{\delta}}) - \frac{\partial U}{\partial\delta} + f - c\overset{\circ}{\delta}\}\Delta\delta dt = 0 \quad (۱-٥١)$$

با توجه به انتخابي بودن $\Delta\delta$ بر اساس روش گلركين مي‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\overset{\circ}{\delta}}) + \frac{\partial U}{\partial\delta} + c\overset{\circ}{\delta} = f \quad (۱-٥٢)$$

با توجه به تعريف تابع ميرائي D_S كه بصورت زير تعريف مي‌شود:

$$D_s = \frac{1}{2}c\overset{\circ}{\delta}^2 \quad (۱-٥٣)$$

بنابه تعريف فوق نيروي ميرائي بصورت زير بدست مي‌آيد: