بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

مقدمه‌ای بر

پردازش سیگنال‌های دیجیتال

تألیف و تدوین:
دکتر محمد شمس اسفندآبادی
مهندس ابوالفضل احمدی

شمس اسفند آبادی ، محمد ، ۱۳۵۷/
مقدمه بر پردازش سیگنال های دیجیتال/ تألیف و تدوین: محمد شمس اسفند آبادی، ابوالفضل احمدی.ـــتهران: دانشگاه شهید رجائی، ۱۳۸۵. VI ۳۱۶ص.
۹ – ۰۰ – ۲۶۵۱ – ۹۶۴ – ۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی فیپا.
واژه نامه
کتابنامه :ص.[۳۱۶-۳۱۵] .
۱. پردازش سیگنال ها – – روش های رقمی ۲. مطلب(برنامه کامپیوتر). الف. احمدی، ابوالفضل. ب.دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی.ج.عنوان
۷م۸ش/TK ۵۱۰۲/۹ ۶۲۱/۳۸۲۲
کتابخانه ملی ۲۲۶۳۲-۸۵م

عنوان : مقدمه ای بر پردازش سیگنال های دیجیتال
تألیف : محمد شمس اسفند آبادی، ابوالفضل احمدی
چاپ اول : ۱۳۸۵
چاپ دوم : ۱۳۹۱
انتشارات : دانشگاه شهید رجائی
لیتوگرافی :گرنامی
چاپ : پایان
ناظرفنی : غلامرضا کارگریان مروستی
شمارگان : ۱۰۰۰ جلد
قیمت : ۹۰,۰۰۰ تومان
شابک : ۹ – ۰۰ – ۲٦٥۱ – ۹٦٤ – ۹۷۸ ISBN: ۹۷۸ – ۹٦٤ – ۲٦٥۱ – ۰۰ – ۹

نشانی: تهران، لویزان – کد پستی ۱٦۷۸۸ – صندوق پستی ۱٦۳ – ۱٦۷۸٥ – تلفن: ۹ – ۲۲۹۷۰۰٦۰
نمابر: ۲۲۹۷۰۰۰۳ پست الکترونیکی: sru@srttu.edu

بنام آفریدگار هستی

بسیاری از پردازش‌ها را می‌توان به جای سیگنال‌های آنالوگ روی سیگنال دیجیتال صورت داد در این صورت در برخی موارد نتیجهٔ پردازش بهتر خواهد بود. یک سیگنال دیجیتال را پس از نمونه‌برداری از یک سیگنال آنالوگ (پیوسته) و کوانتیزاسیون دامنهٔ نمونه‌ها به دست می‌آوریم. پس از پردازش سیگنال دیجیتال، دوباره آن را به سیگنال آنالوگ تبدیل می‌کنیم. فرکانس نمونه‌برداری بستگی به بیشترین مولفهٔ فرکانسی موجود در سیگنال دارد.

در فصل اول به بررسی سیستم‌ها و سیگنال‌های زمان – گسسته پرداخته شده است که مروری مختصر بر درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها تلقی می‌شود. در فصل دوم سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان گسسته در حوزهٔ زمان معرفی می‌شوند که سرآغاز هر کتاب پردازش سیگنال‌های دیجیتال است. در این فصل به مفهوم زمان گسسته پرداخته شده و رابطهٔ بین ورودی و خروجی یک سیستم زمان – گسسته که مهمترین رابطه در پردازش سیگنال‌های دیجیتال می‌باشد، بیان می‌گردد. در فصل سوم سیگنال‌ها و سیستم-های زمان گسسته در حوزهٔ فرکانس بررسی می‌شود. تبدیل فوریه مهمترین تبدیلی است که توسط دانشمند فرانسوی به همین نام در سال ارائه گردید. تبدیل فوریه ابتدا برای بیان توزیع حرارت ارائه شده بود و بعدها در مهندسی برق و بخصوص در مخابرات اهمیت ویژه‌ای پیدا کرد. تبدیل فوریه رفتار یک سیگنال یا سیستم را در حوزهٔ فرکانس بیان می‌کند. در فصل چهارم حوزهٔ مهم دیگری بنام حوزهٔ z معرفی می‌شود که برخی از مشکلات تبدیل فوریه را حل می‌کند. برای تحقق سیستم‌های دیجیتال تبدیل z نقش مهمی را بازی می‌کند. فصل‌های پنجم و ششم ارزش عملی ویژه‌ای دارند زیرا چگونگی پیاده‌سازی نرم‌افزاری و سخت‌افزاری سیستم‌های دیجیتال را بیان می‌کنند. برای تحقق یک سیستم دیجیتال نیاز به یک ساختار است. ساختارهای مختلف خواص مختلفی را به سیستم می‌دهند. فصل‌های هفتم و هشتم نیز گروه مهمی از سیستم‌های دیجیتال یعنی فیلترها را معرفی می‌کنند. یک فیلتر برخی از مولفه‌های فرکانسی یک سیگنال را تضعیف می‌کند. فیلترهایی که با عناصر الکترونیکی نظیر سلف، خازن و مقاومت یا عناصر فعال

مانند تقویت‌کننده‌های عملیاتی ساخته می‌شوند عموماً مشخصه‌هایی غیر ایده‌آل دارند. فیلترها در بسیاری از کاربردها مثل کاربردهای صوتی، پردازش تصویر، پردازش سیگنال-های تصادفی، مخابرات دیجیتال و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. فصل نهم نیز به مسائل عملی در پیاده‌سازی یک سیستم دیجیتال نظیر کوانتیزاسیون و مشکلات ناشی از آن می-پردازد. فصل دهم نیز در مورد گروهی از فیلترها بحث می‌کند که فیلترهای سازگار نام دارند. فیلترهای سازگار فیلترهایی هستند که ضرایب آنها به منظور دستیابی به معیارهای مطلوب، متغیر با زمان هستند، در صورتی که فیلترهای بحث شده در فصول قبل دارای ضرایب ثابتی هستند.

نرم‌افزارهای زیادی برای تحلیل و طراحی سیستم‌های دیجیتال بخصوص فیلترهای دیجیتال وجود دارد اما MATLAB به عنوان یکی از قدرتمندترین نرم‌افزارهای طراحی و تحلیل، شامل ابزاری برای کاربردهای پردازش سیگنال دیجیتال به ویژه فیلترها می-باشد. در این کتاب علاوه بر ارائه مطالب پایه‌ای در پردازش سیگنال‌های دیجیتال نگاهی نیز به ابزارهای موجود در MATLAB شده است. بدیهی است که کتاب حاضر تمام مباحث پردازش سیگنال را پوشش نمی‌دهد ولی امید است این کتاب به عنوان وسیله‌ای برای آشنا شدن علاقه‌مندان به علم پردازش سیگنال و دانشجویانی که مایل هستند خیلی سریع مقدمات این علم را بیاموزند مفید واقع شود.

اغلب فصل‌ها دارای مسائلی در انتهای فصل هستند. مسائل فصول ۵ و ۷، به دلیل وابستگی زیاد این فصول به فصل‌های ٦ و ۸ به طور یکجا در انتهای این فصول آورده شده‌اند.

با تمام سعی و تلاشی که برای هر چه مفیدتر بودن مطالب کتاب به عمل آمده است، با کمال تواضع اذعان می‌داریم که خالی از خطا و اشتباه نمی‌باشد و برای رفع نقایص و کاستی‌های آن امید به یاری دانشجویان و اساتید محترم داریم.

محمد شمس‌اسفندآبادی

ابوالفضل احمدی

فهرست مطالب

فصل اول

سیستم‌های زمان – پیوسته

فصل دوم

سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان – گسسته در حوزهٔ زمان

فصل سوم

سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان گسسته در حوزهٔ فرکانس

فصل چهارم

سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان گسسته در حوزهٔ z

فصل پنجم

تحقق سیستم‌های FIR

فصل ششم

تحقق سیستم‌های IIR

فصل هفتم

فیلترهای دیجیتال ۱ (فیلترهای FIR)

فصل هشتم

فیلترهای دیجیتال ۲ (فیلترهای IIR)

فصل نهم

بررسی محدودیت طول رجیسترها درتحقق سیستم های دیجیتال

فصل دهم

فیلترهای سازگار

فصل اول

سیستم‌های زمان - پیوسته

در این فصل با استفاده از نظریه سیستم‌های زمان - پیوسته [1] روابط موجود بین سیگنال‌های آنالوگ مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. این نظریه روابط ریاضی نسبتاً ساده‌ای را برای دسته‌ای از سیستم‌ها که دارای خواص خطی بودن[2] و تغییر ناپذیری با زمان [3] هستند فراهم می‌آورد که ما این سیستم‌ها را به عنوان سیستم‌های LTI می‌شناسیم. هرگاه دو سیگنال بطور همزمان به یک سیستم خطی اعمال شوند، روی هم اثر متقابل نخواهند داشت. فرض کنید که $y_1(t)$ پاسخ یک سیستم به ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ نیز پاسخ به $x_2(t)$ باشد. اگر سیگنال x ترکیب خطی دو سیگنال یعنی $x = ax_1(t) + bx_2(t)$ باشد خروجی، سیگنال y خواهد بود بطوری که $y = ay_1(t) + by_2(t)$ می‌باشد.

تغییر ناپذیری با زمان به این مفهوم است که مشخصات سیستم با زمان تغییر نمی‌کند. خروجی چنین سیستمی به ازای یک ورودی مشخص، مستقل از زمان اعمال ورودی بوده و برای تمام زمان‌ها یکسان است. بنابراین اگر $y(t)$ پاسخ $x(t)$ باشد در آنصورت $y(t-t_0)$ نیز پاسخ $x(t-t_0)$ است.

اگر این شرایط برقرار باشد می‌توان مشخصه‌های یک سیستم را بر اساس عکس‌العمل آن سیستم به سیگنال‌های آزمون[4] مانند پالس، پله و توابع هارمونیک بیان نمود.

[1] continuous –time systems
[2] linearity
[3] Time - Invariance
[4] test signal

۱-۱ روابط در حوزه زمان

تابع ضربه[۱] یکی از سیگنال‌های آزمون می‌باشد. تابع ضربه، حد یک پالس تحریک[۲] در $t = 0$ و سطح 1 است به طوری‌که پهنای پالس به سمت صفر میل می‌کند. پاسخ یک سیستم را به این تابع را پاسخ ضربهٔ سیستم نامیده و با $h(t)$ نشان می‌دهیم. از آنجایی‌که سیستم‌های مورد بحث در این کتاب سیستم‌های علّی[۳] هستند پاسخ ضربه برای زمان‌های منفی صفر خواهد بود. اگر پاسخ ضربه یک سیستم را داشته باشیم با استفاده از ۱-۱ می‌توان پاسخ این سیستم را به هر ورودی دلخواه به‌دست آورد:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \qquad ۱-۱$$

رابطهٔ ۱-۱ انتگرال *کانوولوشن* نامیده می‌شود و آنرا با * نشان می‌دهیم. می‌توان با یک تغییر متغیر ساده نشان داد که هر دو انتگرال بطور کامل معادل هم هستند.
تابع پله[۴] نیز یک سیگنال آزمون است، پاسخ سیستم به این سیگنال پاسخ پله $a(t)$ نامیده می‌شود. تعریف تابع پله به صورت زیر است:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$a(t)$ نیز در سیستم‌های علّی برای زمان‌های منفی صفر است، یعنی:

$$a(t) = 0 \qquad for \qquad t < 0$$

اگر پاسخ پلهٔ یک سیستم معلوم باشد رابطهٔ بین ورودی و خروجی در این سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\frac{da(\tau)}{d\tau}d\tau = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\frac{da(t-\tau)}{d\tau}d\tau \qquad ۲-۱$$

[1] delta function
[2] impulse

[3] در فصل دوم با مفهوم سیستم‌های علّی آشنا خواهید شد.

[4] step function

در این حالت سیگنال خروجی عبارت است از کانوولوشن بین پاسخ پله و مشتق ورودی بر حسب زمان. روابط زیر بین تابع ضربه و تابع پله – واحد حاکم است:

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$ ۱–۳– الف

و:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$ ۱–۳– ب

برای سیستم‌های LTI روابط مشابه‌ای بین پاسخ پله و پاسخ ضربه وجود دارد:

$$h(t)=\frac{da(t)}{dt}$$ ۱–۴– الف

$$a(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$ ۱–۴– ب

۱–۲ روابط در حوزه فرکانس

می‌توان رفتار سیستم را در حوزه فرکانس با ورودی تابع نمایی به صورت زیر تحلیل نمود:

$$x(t)=e^{st}$$ ۱–۵

که در آن s فرکانس مختلط است. s شامل دو قسمت می‌باشد: یک بخش حقیقی σ که بسته به علامت آن باعث افزایش یا کاهش دامنه می‌شود و یک بخش موهومی ω که فرکانس یک نوسان هارمونیک است.

$$s=\sigma+j\omega$$

نوسان حقیقی از بخش حقیقی رابطه ۱–۵ به دست می‌آید:

$$\operatorname{Re}x(t)=e^{\sigma t}\cos\omega t$$

با قرار دادن رابطه ۱–۵ به عنوان ورودی در انتگرال کانوولوشن ۱–۱ عکس‌العمل سیستم به تحریک نمایی مختلط به‌دست می‌آید:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau$$

$$y(t)=e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$ ۱–۶

رابطه ۱–۶ یک عبارت مختلط را بیان می‌کند که تابعی از فرکانس مختلط s می‌باشد.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}\,dt \qquad ۱–۷$$

در نتیجه، خروجی $y(t)$ نیز یک تابع نمایی است که از حاصل‌ضرب سیگنال ورودی و ضریب مختلط $H(s)$ به‌دست می‌آید. بنابراین ورودی و خروجی در دامنه و فـاز بـا یکـدیگر متفـاوت هستند.

$$y(t) = e^{st}H(s)$$

$$\operatorname{Re} y(t) = |H(s)|e^{\sigma t}\ \cos[\omega t + \arg H(s)] \qquad ۱–۸$$

تابع $H(s)$ تابع تبدیل سیستم نام دارد و مشخصات سیستم را بطور کامل در حوزهٔ فرکانس بیان می‌کند.

۱–۱–۲ تبدیل لاپلاس

رابطهٔ ۱–۷ تبدیل لاپلاس نام دارد. بنابراین تابع تبدیل $H(s)$ تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه سیستم می‌باشد. در عمل شکل خاصی از تبدیل لاپلاس مورد استفاده قرار می‌گیرد که برای $t \geq 0$ تعریف می‌شود و تبدیل لاپلاس یک طرفه نامیده می‌شود.

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad ۱–۹– الف$$

در محاسبه انتگرال ۱–۹– الف قسمت حقیقی s (یعنی σ) پارامتری در نظر گرفته می‌شود که می‌توان آنرا آزادانه به نحوی انتخاب نمود که انتگرال همگرا شود. در جدول ۱–۱ چند مثال و در جدول ۱–۲ چند قانون مهم از تبدیل لاپلاس آورده شده‌است.

تبدیل معکوس که حوزه فرکانس را به حوزه زمان تبدیل می‌کند عبارت است از:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \qquad ۱–۹– ب$$

رابطهٔ ۱–۹– ب یک انتگرال در صفحه مختلط s است که مسیر انتگرال‌گیری با مقدار مناسب σ طوری انتخاب می‌شود که انتگرال همگرا شود.

جدول ۱-۱ : چند مثال از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه

حوزه زمان	تبدیل لاپلاس	تبدیل فوریه
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta(\omega)$
$t\,u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$j\pi\frac{\mathrm{d}\delta(\omega)}{\mathrm{d}\omega}-\frac{1}{\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\,u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{1}{j\omega+\alpha}$
$(1-e^{-\alpha t})u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$\pi\delta(\omega)+\frac{\alpha}{j\omega(j\omega+\alpha)}$
$e^{j\omega_0 t}\,u(t)$	$\frac{1}{s-j\omega_0}$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{j\omega-\omega_0}$
$\cos\omega_0 t\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2+\omega^2}$
$\sin\omega_0 t\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{\pi}{j2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}$
$\cos\omega_0 t e^{-\alpha t}\,u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_0^2}$
$\sin\omega_0 t e^{-\alpha t}\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\frac{\omega_0}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_0^2}$

در اینجا تبدیل لاپلاس خاصیت جالبی دارد که برای توصیف رفتار سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس بسیار مهم است. کانوولوشن دو تابع ($x_1(t)*x_2(t)$) در حوزه زمان معادل ضرب معمولی تبدیل لاپلاس این توابع در حوزه فرکانس می‌باشد ($x_1(s)\times x_2(s)$).

برای سیستم‌های LTI سیگنال خروجی عبارت است از تبدیل لاپلاس ورودی ضرب در تابع تبدیل سیستم یعنی $H(s)$، بنابراین داریم:

$$Y(s)=H(s)X(s) \qquad ۱۰-۱$$

از اینرو ۱-۱۰ رابطه بین ورودی و خروجی در حوزه فرکانس را بیان می‌کند و بنابراین معادل رابطه ۱-۱ است که رابطه بین ورودی و خروجی را در حوزه زمان بیان می‌کند.

جدول ۱-۲ : خواص تبدیل فوریه و لاپلاس

حوزه زمان	تبدیل لاپلاس	تبدیل فوریه
$f(t-t_0)$	$F(s)e^{-st_0}$	$F(j\omega)\,e^{-j\omega t_0}$
$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F(s/a)$	$\frac{1}{\|a\|}F(j\omega/a)$
$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$sF(s)-F(0)$	$j\omega F(j\omega)$
$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$	————
$\int_{-\infty}^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	————	$\frac{F(j\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
$f(t)*g(t)$	$F(s)\times G(s)$	$F(j\omega)\times G(j\omega)$

۲-۲-۱ تبدیل فوریه

در رابطه ۱-۷ وقتی $\sigma=0$ باشد (یا $s=j\omega$) حالت خاصی از تبدیل لاپلاس می‌آید:

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{۱-۱۱- الف}$$

انتگرال فوق تبدیل فوریه نام دارد. این رابطه بر خلاف تبدیل لاپلاس شامل یک ضریب میرایی که احتمال همگرایی را افزایش دهد نیست. بنابراین انتگرال فوریه تنها در صورتی همگراست که یا سیگنال در حوزه زمان محدود باشد و یا برای زمان‌های بزرگ به اندازه کافی افت کند. جدول۱-۱ چند مثال از تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس را نشان می‌دهد و امکان مقایسه بین آنها را فراهم می‌آورد. با قرار دادن $j\omega$ به جای s از تبدیل لاپلاس به تبدیل فوریه می‌رسیم و برعکس. اما این کار در صورتی امکان پذیر است که انتگرال فوریه به ازای تمام ωها همگرا باشد و این بدین معناست که هیچ ضربه‌ای در حوزهٔ فرکانس وجود ندارد. سیستم‌های پایدار دارای توابع تبدیلی با چنین خصوصیتی هستند یعنی می‌توان $H(j\omega)$ را از $H(s)$ به دست - آورد و برای این کار کافی است $j\omega$ را به جای s قرار داد(یعنی $s=j\omega$). تبدیل فوریهٔ معکوس به صورت رابطهٔ ۱-۱۱- ب بیان می‌شود:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ ۱-۱۱- ب

جدول ۱-۲ خواص بیشتری را از تبدیل فوریه نشان می‌دهد.

تبدیل فوریهٔ پاسخ ضربه (یعنی $H(j\omega)$) نیز تابع تبدیل سیستم نامیده می‌شود. قرار دادن $\sigma=0$ یا $s=j\omega$ در رابطهٔ ۱-۸ نشان می‌دهد که $H(j\omega)$ رفتار سیستم را به ازای سیگنال-های هارمونیک در ورودی در حالت دائمی بیان می‌کند.

$$\mathrm{Re}\, y(t)=\left|H(j\omega)\right|\cos\left(\omega t+\arg H(j\omega)\right)$$

بنابراین $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی سیستم خواهد بود. اندازهٔ $H(j\omega)$ دامنه یا اندازهٔ پاسخ فرکانسی نامیده می‌شود و اغلب به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$a(\omega)=-20\log\left|H(j\omega)\right|$$ ۱-۱۲- الف

در رابطه فوق $a(\omega)$ تضعیف لگاریتمی سیستم بر حسب دسی بل (dB) می‌باشد. آرگومان پاسخ فرکانسی، قرینهٔ فاز پاسخ فرکانسی سیستم می‌باشد یعنی:

$$b(\omega)=-\arg H(j\omega)=-\arctan\left[\frac{\mathrm{Im}\,H(j\omega)}{\mathrm{Re}\,H(j\omega)}\right]$$ ۱-۱۲- ب

فاز پاسخ فرکانسی، اختلاف فاز بین یک سیگنال سینوسی در ورودی و خروجی برحسب فرکانس ω است. مشتق فاز پاسخ فرکانسی بر حسب فرکانس، تأخیر گروه[1] سیستم نام دارد:

$$\tau_g(\omega)=\frac{\mathrm{d}b(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$ ۱-۱۲- ج

برای اینکه شکل سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستم در حوزهٔ زمان تغییر نکند بایستی تأخیر گروه در باند عبور سیستم مسطح باشد و این بدین معنی است که فاز پاسخ فرکانسی خطی باشد. بدین ترتیب همه مولفه‌های فرکانسی سیگنال ورودی به هنگام عبور از سیستم دچار تأخیر یکسانی می‌شوند.

◀مثال ۱-۱ :

یک فیلتر پایین گذر مرتبه اول را در نظر بگیرید که دارای تابع انتقال زیر است:

---

[1] Group Delay

$$H(s)=\frac{a}{a+s} \qquad a>0$$

با جایگزینی $s=j\omega$ پاسخ فرکانسی فیلتر به دست می‌آید یعنی:

$$H(j\omega)=\frac{a}{a+j\omega} \qquad a>0$$

اندازهٔ پاسخ فرکانسی عبارت است از:

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{a}{\left|a+j\omega\right|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2/a^2}}$$

فاز پاسخ فرکانسی، آرگومان پاسخ فرکانسی با علامت منفی است یعنی:

$$b(\omega)=-\arg H(j\omega)=\arg\frac{1}{H(j\omega)}=\arctan(\omega/a)$$

با مشتق گیری از پاسخ فاز به تأخیر گروه فیلتر می‌رسیم:

$$\tau_g(\omega)=\frac{db(\omega)}{d\omega}=\frac{1/a}{1+\omega^2/a^2}$$

▶

۱–۳ تابع تبدیل

رفتار انتقالی شبکه‌هایی که شامل عناصر فشرده‌ای از قبیل سلف، خازن، مقاومت، ترانسفورماتور و تقویت‌کننده هستند توسط معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی بیان می‌شود.

رابطهٔ ۱–۱۳ شکل عمومی این معادله دیفرانسیل است که در آن $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم است:

$$\begin{aligned} &a_N\frac{\mathrm{d}y^{(N)}}{\mathrm{d}t^N}+a_{N-1}\frac{\mathrm{d}y^{(N-1)}}{\mathrm{d}tN-1}+\ldots+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_0y \\ &=b_M\frac{\mathrm{d}x^{(M)}}{\mathrm{d}t^M}+b_{M-1}\frac{\mathrm{d}x^{(M-1)}}{\mathrm{d}t^{M-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+b_0x \end{aligned} \qquad ۱۳–۱$$

تبدیل لاپلاس ۱–۱۳ یک رابطهٔ جبری است که مشخصات کامل سیستم را در حوزهٔ فرکانس بیان می‌کند. در روابط زیر فرض شده‌است که سیستم در لحظهٔ $t=0$ در سکون اولیه است یعنی در یک شبکهٔ الکتریکی انرژی ذخیره شده در تمام خازن‌ها و سلف‌ها صفر است.

$$a_N s^N Y + a_{N-1} s^{N-1} Y + \ldots + a_1 s Y + a_0 Y$$
$$= b_M s^M X + b_{M-1} s^{M-1} X + \ldots + b_1 s X + b_0 X$$

با مرتب سازی رابطهٔ فوق تابع تبدیل شبکه به‌دست می‌آید که حاصل تقسیم تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی می‌باشد و عبارت است از:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad ۱۴-۱$$

تابع $H(s)$ در رابطهٔ ۱-۱۴ یک کسر گویا از متغیر فرکانسی s بوده و شامل خواص زیر است:

- ضرایب a_i و b_i حقیقی هستند.
- درجهٔ مخرج یعنی N که برابر مرتبهٔ مدار (شبکه) است برابر تعداد عناصر ذخیره کنندهٔ انرژی (سلف و خازن) در شبکه است.
- درجهٔ صورت بایستی از درجهٔ مخرج کوچکتر یا مساوی با آن باشد. در غیر اینصورت سیستم شامل مشتق‌گیرهای ایده‌آل خواهد بود که تحقق‌پذیر نیستند.

علاوه بر این شکل نمایش تابع تبدیل که رابطهٔ نزدیکی با معادله دیفرانسیل سیستم دارد دو شکل نمایش دیگر وجود دارد که دارای اهمیت عملی زیادی می‌باشند: نمایش قطب/صفر و بسط کسری ــ جزئی[1].

اگر چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج کسر ۱-۱۴ بر اساس ریشه‌هایشان نوشته شوند نمایش قطب / صفر به‌دست می‌آید یعنی داریم:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_M}{b_N} \quad \frac{(s - s_{01}) \ldots (s - s_{0(M-1)}) \quad (s - s_{0M})}{(s - s_{\infty 1}) \ldots (s - s_{\infty(N-1)}) \quad (s - s_{\infty N})} \qquad ۱۵-۱$$

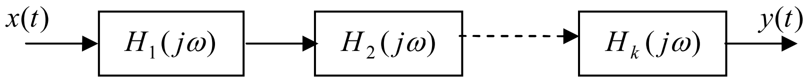
ریشه‌های چند جمله‌ای صورت، صفرها و ریشه‌های مخرج قطب‌های تابع تبدیل هستند. قطب-ها و صفرها دارای خواص زیر می‌باشند:

- قطب‌ها و صفرها یا حقیقی‌اند یا به صورت یک زوج مختلط مزدوج می‌باشند. این موضوع باعث می‌شود که ضرایب چند جمله‌ای در مخرج و صورت حقیقی باشند.

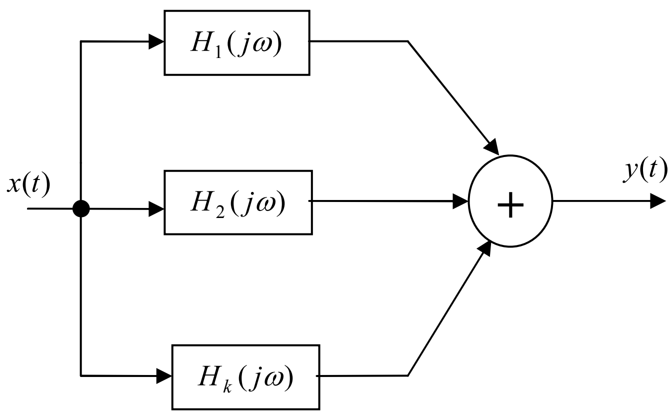
[1] Partial - fractional expansion

- بخش حقیقی قطب‌ها بایستی منفی باشد و این بدین مفهوم است که قطب‌های سیستم بایستی در سمت چپ صفحهٔ s قرار بگیرند. این شرایط، پایداری سیستم را تضمین می‌کند یعنی سیستم به ازای ورودی محدود، خروجی محدود تولید می‌کند. وقتی ورودی صفر شود، تمام سیگنال‌های داخلی سیستم و سیگنال خروجی به صفر می‌گرایند.

نمایش قطب / صفر اهمیت ویژه‌ای در تحقق یک تابع تبدیل به صورت زیر سیستم‌های مرتبه اول و دوم متوالی دارد (شکل ۱–۱– الف). طبقات مرتبه اول، تحقق قطب‌های حقیقی و طبقات مرتبه دوم تحقق جفت قطب‌های مختلط مزدوج می‌باشد.



شکل ۱–۱ – الف : تحقق متوالی



شکل ۱–۱– ب : تحقق موازی

◀مثال ۱–۲ :

این مثال چگونگی به‌دست آوردن نمایش صفر / قطب یک تابع تبدیل که به شکل کسر گویا می‌باشد را نشان می‌دهد.