بسم ا... الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

روش المان مرزی و کاربردهای آن در علوم و مهندسی

(دوره کامل آموزشی)

ترجمه و تالیف:

آرش طاهری

سکینه اورنگی

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

روش اجزاء مرزی و کاربردهای آن در علوم و مهندسی

(دوره کامل آموزشی)

ترجمه و تألیف:

آرش طاهری

سکینه اورنگی

سر شناسنامه	:	طاهری، آرش،۱۳۵۶
عنوان و نام پدید آور	:	روش اجزاء مرزی وکاربردهای آن درعلوم و مهندسی(دوره کامل آموزشی) /ترجمه وتالیف آرش طاهری، سکینه اورنگی
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، ۱۳۸۹.
مشخصات ظاهری	:	۴۸۹ص.: مصور، جدول. عکس،نمودار
شابک	:	۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۲۶-۹
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	کتابنامه : ص .{۴۸۲ }- ۴۸۹.
موضوع	:	روش اجزاء مرزی – داده پردازی
موضوع	:	برنامه نویسی.
شناسه افزوده	:	اورنگی، سکینه،۱۳۵۹.
شناسه افزوده	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
رده بندی کنگره	:	۱۳۸۷ ۲ط ۹۳ ر / TA۳۴۷
رده بندی دیویی	:	۶۲۰/۰۰۱۵۱۵۳۵
شماره کتابشناسی ملی	:	۱۵۹۱۹۲۱

عنوان : روش اجزاء مرزی وکاربردهای آن درعلوم و مهندسی(دوره کامل آموزشی)

ترجمه و تألیف : آرش طاهری،سکینه اورنگی

چاپ اول : ۱۳۸۷

انتشارات : دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

لیتوگرافی : یاس

چاپ : عمران

ناظر فنی : شهرام طهماسبی

شمارگان : ۱۰۰۰ جلد

قیمت : ۸۰۰۰ تومان

شابک : ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۵۱-۲۶-۹ ISBN: 978-964-2651-26-9

نشانی: تهران، لویزان – کد پستی ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸ – صندوق پستی ۱۶۳ – ۱۶۷۸۵ – تلفن: (۲۶۳۲) ۹ – ۲۲۹۷۰۰۶۰، ۲۲۹۷۰۰۷۰، نمابر: ۲۲۹۷۰۰۰۳، پست الکترونیکی: Publish@srttu.edu، وب سایت: http://Publish.srttu.edu

تقدیم با شوق و عشق به

پروردگار پاک و مهربان (جل جلاله)

و تمام انبیاء الهی (علیهم السلام)

و علی الخصوص به نگین سبز رسالت، پیامبر رحمت و مهربانی

حضرت محمد (صلی ا... علیه و آله)

آن گوهر یگانهٔ دوران محمد(ص) است
آن تکسوار عرصهٔ ایمان محمد(ص) است
در خیل انبیاء(ع) کسی نیست همچو او
آری بحق که مظهر ایمان محمد(ص) است
ایزد به عشق او همه عالم بیافرید
عالم چو جسم و جلوه‌گه جان محمد(ص) است

پیشگفتار

روش المان مرزی (BEM)[1] هم‌اکنون به عنوان یک روش عددی بسیار قدرتمند و دقیق در مکانیک محیط‌های پیوسته مطرح است. جالب است بدانیم تاکنون اکثر مهندسینی که متخصص روش‌های عددی تحلیل تنش هستند و در این بخش مشغول فعالیتند در مورد این روش اطلاع چندانی ندارند و یا نمی‌دانند این روش چرا توسعه یافته است. اکثر آنها وقتی با یک کتاب در این حیطه از علم مواجه می‌شوند، به سرعت دلسرد شده و به علت ریاضیات بیش از حدی که این روش شامل آن است، آنرا کنار می‌گذارند. در عوض روش المان محدود (FEM)[2] تعداد بسیاری را در صنعت به خود جذب نموده است. بسیاری از مهندسان روش المان محدود را هر روز در حل مسائل و مشکلاتی که با آن روبرو هستند بکار می گیرند و از کارآئی آن در مسائل عملی کمال رضایت را دارند. اگرچه فرمول بندی روش المان محدود (FE) ذاتاً برای یادگیری ساده تر از روش المان مرزی (BE) می باشد ولی شامل مشکلاتی نیز هست که در نگاه اول و تا هنگامی که شخصی آنرا از همه جهات با (BE) مقایسه نماید، به وضوح آشکار نمی‌گردد.

در همه شاخه های رشته های مهندسی ریاضیات ظاهر می‌شود اما مانع اصلی در به تاخیر افتادن توسعه سریع روش المان مرزی، شهرت این روش به داشتن ریاضیات پیچیده و غیر معمول در بین مهندسان می باشد. این کتاب به نحوی به نگارش در آمده که این طرز تفکر را تغییر دهد.

[1] Boundary Element Method (BEM)
[2] Finite Element Method (FEM)

این کتاب یک متن خود آموز برای روش المان مرزی (BE) می‌باشد. نوع ارائه و محدوده کاربردها به نحوی است که کتاب را به یک متن کامل در روش‌های المان مرزی (BE) برای دانشجویان کارشناسی و تحصیلات تکمیلی تبدیل نموده است. تلاش شده است که سطح ریاضی کتاب در حداقل ممکن حفظ گردد و به شکل واضح بدون استفاده از اختصارات تانسوری ارائه گردد مگر در مواردی که اجتناب ناپذیر بوده است. در کل کتاب، فرمول‌بندی المان مرزی مستقیم[1] مورد استفاده قرار گرفته است. در این کتاب برای بخش‌های مکانیک جامدات از مرجع [1] که کتاب خودآموزی در این زمینه می‌باشد استفاده شده البته هر کجا لازم بوده مطالب تکمیلی از سایر مراجع افزوده شده است و بخش مکانیک سیالات نیز با استفاده از مراجع و مقالات، تالیف شده است. اصولاً در زمینه روش المان مرزی، تعداد کتب محدود است و تاکنون کتابی در این زمینه به زبان فارسی به نگارش درنیامده است. بر این باوریم که این کتاب بتواند برای دانشجویان رشته مهندسی مکانیک، مهندسی هوافضا، مهندسی پزشکی، فیزیک ، بیوفیزیک و... و تمامی افرادی که به هر نحو در زمینه حل عددی معادلات به فعالیت علمی-پژوهشی می پردازند مفید واقع شود.

شکل کلی کتاب به نحوی است که تمامی پیش زمینه ریاضی مورد نیاز کتاب در یک فصل مجزا آمده است به طوریکه خوانندگان آشنا به ریاضیات موضوع می توانند این فصل را در مطالعه حذف کنند وگهگاه بر حسب ضرورت به آن مراجعه نمایند بدون آنکه تسلسل مطالب را از دست بدهند. یکی دیگر از خصوصیات این کتاب آنست که پیاده‌سازی عددی روش المان مرزی در آن به چند مرحله راحت و سر راست و سازگار تقسیم شده که در چند فصل آمده است. بعد از فصل مقدمه، فصل دوم پیش زمینه ریاضی موضوع را مطرح می نماید. در ادامه، فرمول بندی المان مرزی به شکل ساده‌ترین حالت یعنی مسائل پتانسیل دو بعدی ارائه می‌گردد. فصل چهارم به تاکید بر روی مسائل الاستیسیته ساکن می‌پردازد که مهمترین بخش از کاربردهای روش المان مرزی می‌باشد. فصول 5 و6 به ترتیب مسائل سه بعدی، پتانسیل متقارن والاستیسیته ساکن را طرح می کنند. در تمامی این فصول یک روند گام به گام و مشابه برای بیان مطالب اختیار شده است. سه فصل بعدی با مسائل ترموالاستیک چند دامنه‌ای و مکانیک شکست سر و کار دارد. فصل دهم به مروری بر فرمول بندی المان مرزی در مسائل غیرخطی می‌پردازد با تاکید ویژه بر الاستیسیته-پلاستیسیته. مطالب پیشرفته‌تر شامل ترکیب

---

[1] Direct Boundary Element

روش المان مرزی و المان محدود، بارگذاری گریز از مرکز، المان‌های نامتناهی و مسائل وابسته به زمان در فصل یازدهم ارائه شده است که مبنائی را برای تحقیقات آینده در این زمینه از کاربردها ایجاد می‌نماید. فصل دوازدهم نیز به کاربرد روش المان مرزی در مکانیک سیالات می‌پردازد که شاخه ای از مکانیک سیالات محاسباتی (CFD)[1] محسوب می‌شود.

در انتها بر خود لازم می‌دانیم از زحمات تمام عزیزانی که ما را در تهیه این کتاب یاری کرده‌اند قدردانی نمائیم. به خصوص از جناب آقای دکتر محمدی-امین که در تهیه کتب مراجع زحمات زیادی را متقبل شدند و همچنین جناب آقای دکتر عظمتی معاون محترم پژوهشی دانشگاه شهید رجائی، جناب آقای دکتر ذاکری مسئول محترم انتشارت دانشگاه شهید رجائی، جناب آقای دکتر محمد شمس اسفندآبادی مدیر محترم پژوهشی دانشگاه شهید رجائی، آقایان مهندس کارگریان، مهندس طهماسبی و مهندس معتمدی که در چاپ بهینه و مناسب کتاب حاضر توجه خاصی را مبذول داشتند کمال تشکر را داریم.

آرش طاهری
سکینه اورنگی
تهران 1387
taheri.biocfd@gmail.com

[1] Computational Fluid Dynamic (CFD)

فهرست

علائم اختصاری

برخی از متغیرهای اصلی که در این کتاب استفاده شده در ذیل آمده‌اند. ممکن است در مواردی برخی متغیرها بیش از یک مفهوم داشته باشند.

طول ترک	a
مساحت دامنه حل در مسائل متقارن و مسائل دو بعدی	A
ماتریس شامل هسته‌ها که در $[\phi]$ یا $[u]$ ضرب می‌شود	$[A]$
ماتریس جواب که در بردار مجهولات $[x]$ضرب می‌شود	$\left[A^*\right]$
ماتریس شامل هسته‌ها که در $\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]$ یا $[t]$ ضرب می‌شود	$[B]$
ماتریس اصلاح‌شده $[B]$بعد از اعمال شرایط مرزی	$\left[B^*\right]$
بردار شامل انتگرال‌های نیروی حجمی	B_i
بردار شامل کمیت‌های معلوم واقع در سمت راست معادلات	$[c]$
تانسور مرتبه سه که در نیروهای کشش/فشار ضرب می‌شود	$D_{kij}\left(p,Q\right)$
بردار واحد در یکی از جهت‌های مختصات دکارتی	e_i
مدول یانگ	E
انتگرال بیضوی از مرتبه دوم	$E\left(m,\frac{\pi}{2}\right)$
بردار نیروی حجمی	f_i
بردار نیرو	F_i
تعداد کل نقاط در روش مربعی گوس	G
نرخ آزادسازی انرژی کرنش	G
بردار گالرکین	G_i
ژاکوبین تبدیل در مسائل دو بعدی و متقارن	$J\left(\xi\right)$
ژاکوبین تبدیل در مسائل سه بعدی	$J\left(\xi_1,\xi_2\right)$
ضریب نفوذ، ضریب هدایت دما	k
انتگرال بیضوی از مرتبه اول	$K\left(m,\frac{\pi}{2}\right)$

چقرمگی شکست (مقدار بحرانی ضریب شدت تنش)	K_c
هسته پتانسیل اول که در گرادیان‌های پتانسیل ضرب می‌شود	$K_1\left(p,Q\right)$
هسته پتانسیل دوم که در گرادیان‌های پتانسیل ضرب می‌شود	$K_2\left(p,Q\right)$
ضریب شدت تنش برای مدهای شکست I و II و III	K_I, K_{II}, K_{III}
تابع شکل خطی بکارگرفته شده در مسائل سه بعدی	$L_C\left(\eta_1,\eta_2\right)$
فاصله حداکثر بین دو نقطه بر روی مرز	$L_{\max}$
عملگر تبدیل لاپلاس	$L[\ ]$
بردار مماس در مسائل متقارن و دو بعدی	m
مدول انتگرال‌های بیضوی	m
بردارهای مماس در مسائل سه بعدی	m_1, m_2
هسته ترموالاستیک که در دما ضرب می‌شود	$M_i\left(p,Q\right)$
بردار عمودی در جهت بیرون بر روی مرز	n
توابع شکل درجه دوم در مسائل متقارن و یا دو بعدی	$N_C\left(\xi\right)$
توابع شکل درجه دوم در مسائل سه‌بعدی	$N_C\left(\xi_1,\xi_2\right)$
هسته ترموالاستیک که در گرادیان‌های دما ضرب می‌شود	$N_i\left(p,Q\right)$
نقطه نیرو داخل دامنه حل	p
نقطه نیرو منتقل شده به مرز، فشار	P
نقطه میدان داخل دامنه حل	q
نقطه میدان بر روی مرز	Q
مختصات استوانه‌ای متغیر مربوط به نقطه میدان Q	r_Q, θ_Q, z_Q
فاصله بین نقاط p و Q	$r\left(p,Q\right)$
مختصات استوانه‌ای ثابت مربوط به نقطه نیروی p	R_p, θ_p, Z_p
سطح در مسائل سه بعدی	S
ضریب مقیاس	S
تانسور مرتبه سه که در بردار تغییرمکان ضرب می‌شود	$S_{kij}\left(p,Q\right)$
مولفه تنش منحرف‌شده[1] (الاستیسیته-پلاستیسیته)	S_{ij}
بردار کشش/فشار	t_i

[1] Deviatoric Stress Component

تابع دما	T
هسته کشش/فشار	$T_{ij}(p,Q)$
بردار تغییر مکان	u_i
مولفه عمودی تغییر مکان	u_n
انرژی کرنشی	U
هسته تغییر مکان	$U_{ij}(p,Q)$
مجموعه محورهای عمودی سه‌گانه استفاده شده در مسائل سه بعدی	v_1, v_2, v_3
حجم در مسائل سه بعدی	V
هسته‌های الاستیک-پلاستیک بکار رفته در رویکرد تنش اولیه	$V_{kij}(p,q)$
تابع وزن در روش مربعی گوسی معمولی	w_g
تابع وزن در روش مربعی گوسی لگاریتمی	w_{gl}
هسته‌های الاستیک-پلاستیک بکار رفته در رویکرد تنش اولیه	$W_{kij}(p,q)$
بردار شامل مجهولات	$[x]$
مختصات دکارتی متغیر برای نقطه میدان Q	x_Q, y_Q, z_Q
مختصات دکارتی ثابت برای نقطه بار p	X_p, Y_p, Z_p
زاویه	α
ضریب انبساط دمایی	α
نفوذ گرمایی	α_d
سطح یا مرز در مسائل متقارن و دو بعدی	Γ
گرادیان پتانسیل عمودی و گرادیان دمایی	$\frac{\partial \phi}{\partial n}$
تابع دلتای کرونکر (دلتای دیراک)	δ_{ij}
تداخل یا فاصله در جهت عمودی	δ_n
مقدار لغزش مماسی در لغزش اصطکاکی	δ_t
کرنش معادل(الاستیسیته-پلاستیسیته)	ε_{eq}
مولفه‌های کرنش دکارتی	ε_{ij}

کرنش شعاعی در مسائل متقارن	ε_{rr}
کرنش برشی در مسائل متقارن	ε_{rz}
کرنش محوری در مسائل متقارن	ε_{zz}
کرنش حلقوی در مسائل متقارن	$\varepsilon_{\theta\theta}$
ثابت لیم	λ
حل اساسی معادله لاپلاس	$\lambda(p,Q)$
مدول برشی، لزجت دینامیکی	μ
ضریب اصطکاک	μ
نسبت پوآسون، لزجت مطلق	ν
مختصات اصلی محلی در مسائل متقارن و دو بعدی	ξ
مختصات اصلی محلی در مسائل سه بعدی	ξ_1,ξ_2
مختصات گوسی در روش گوس مربعی معمولی	ξ_g
مختصات گوسی در روش گوس مربعی لگاریتمی	ξ_{gl}
چگالی	ρ
تنش معادل در یک نقطه	σ_e
تنش وان- میسز معادل (الاستیسیته- پلاستیسیته)	σ_{eq}
مولفه‌های تنش دکارتی	σ_{ij}
مولفه‌های تنش هیدرواستاتیک (الاستیسیته- پلاستیسیته)	σ_m
مولفه‌های تنش عمودی	σ_n
تنش شعاعی در مسائل متقارن	σ_{rr}
تنش برشی در مسائل متقارن	σ_{rz}
مولفه‌های تنش مماسی	σ_t
تنش محوری در مسائل متقارن	σ_{zz}
تنش حلقوی در مسائل متقارن	$\sigma_{\theta\theta}$
تابع پتانسیل یا دما	ϕ
سرعت زاویه‌ای حول محور z	ω_z
عملگر لاپلاسین	∇^2
حرارت ویژه در حالت فشار ثابت و حجم ثابت	c_p, c_v

فصل اول

مقدمه

بدون بکارگیری روش‌های عددی تقریباً غیر ممکن است بتوان مسائل کاربردی مهندسی را با درجه قابل قبولی از دقت حل نمود. اغلب روش‌های عددی که در مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می شوند بر پایه این اصل استوارند که می‌توان معادلات و روابطی را که به صورت دقیق رفتار یک جزء دیفرانسیلی کوچک از جسم را توصیف می‌کنند از فیزیک مسئله استخراج نمود. سپس با تقسیم کل جسم به تعداد زیادی از این اجزاء کوچک و استفاده از روابط مکمل و یا فرآیند تلفیق[1] این اجزا در کنار هم می‌توان برای مقادیر متغیرها مانند تنش‌ها و جابه‌جائی‌ها در هر نقطه از جسم یک پیش‌بینی دقیق و معقولانه به دست آورد. هرچه اندازه این اجزا دیفرانسیلی کوچکتر باشد، حل عددی دقیق‌تر خواهد بود اما هزینه زمان محاسباتی نیز افزایش خواهد یافت که مانعی در جهت ریز نمودن بیش از حد دامنه محاسباتی می‌باشد. در چنین شرایطی برای دست یافتن به شبکه محاسباتی کاملاً ریز می‌توان از پردازش موازی[2] ، روش‌های چند شبکه‌ای[3] وغیره استفاده نمود. در حل عددی همیشه باید بین دقت و هزینه محاسباتی مصالحه‌ای انجام گیرد و متخصصین ناچار به تصمیم‌گیری بین این دو مقوله می‌باشند. به صورت کلی در مسائل مهندسی کاربردی جواب این سئوال که اجزاء دیفرانسیلی برای دستیابی به دقت بهینه چقدر باید کوچک باشندکاملاً واضح نیست و با پس- پردازش‌ها[4] به صورت سعی و خطا[5] به دست می‌آید.

---

[1] Assemble
[2] Parallel Processing
[3] Multi Grid Methods
[4] Post-Processing
[5] Try and Error

در این فصل دو روش مهم المان محدود[1] و المان مرزی[2] که در مکانیک محیط‌های پیوسته دارای محبوبیت بسیارند مورد مقایسه و مرور اجمالی قرار می‌گیرد. مزیت‌ها و مزایای روش المان مرزی بحث شده و مروری تاریخی بر توسعه روش ارائه می‌گردد.کلیت کتاب حاضر و خلاصه‌ای از فصل‌ها نیز برای بیان دورنمای مطالب ارائه شده در این فصل ضمیمه شده است.

1-1- روش‌های عددی در مکانیک محیط‌های پیوسته

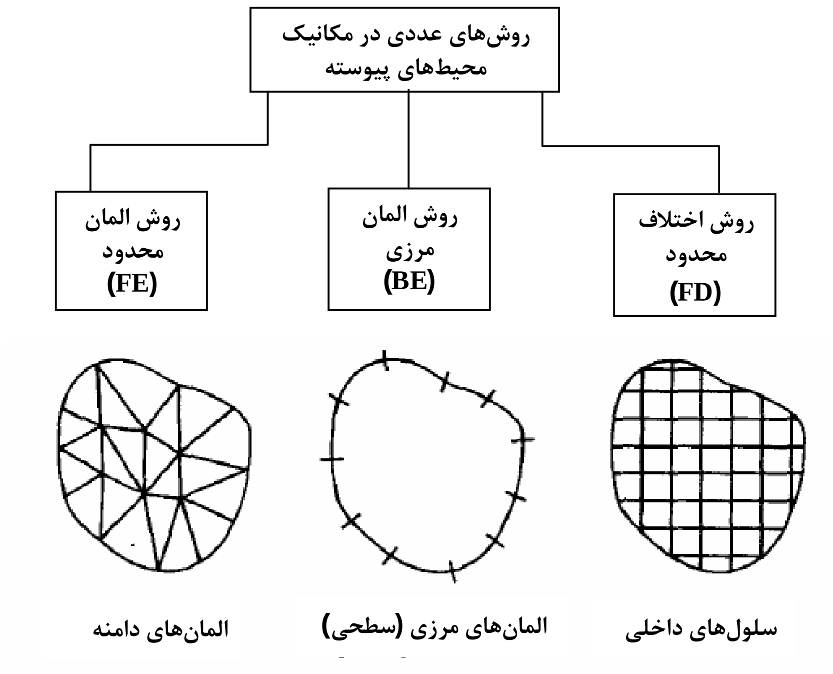
می‌توان روش‌های عددی به کار گرفته شده در مکانیک محیط‌های پیوسته را به سه رویکرد متفاوت تقسیم نمود: روش اختلاف محدود[3] ، روش المان محدود و روش المان مرزی که در شکل (1-1) آمده است. توصیف خلاصه ای از هر یک از این روش‌ها در ذیل خواهد آمد

روش اختلاف محدود(FD)

در این روش، مشتقاتی که در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای[4] ظاهر می‌شوند بر حسب معادلات اختلاف محدود جایگزین می‌گردند. در این روش معمولاً از بسط تیلور برای گسسته سازی[5] معادلات حاکم[6] استفاده می‌شود. بنابراین، برای یک دامنه حل دو بعدی، شبکه‌ای از سلول‌ها داخل دامنه محاسباتی قرار می‌گیرد و تقریب تفاضلی برای نقاط داخلی اعمال می‌شود. پس از مقداری ساده سازی ریاضی، حاصل یک دستگاه معادلات جبری خطی خواهد بود که بدون اعمال شرایط مرزی تکین[7] می‌باشد بعد از اعمال شرایط مرزی دارای جوابی یکتا[8] است که تمام شرایط مرزی مسئله واقعی را ارضاء می‌کند. روش اختلاف محدود در بین این سه روش ساده ترین حالت است و نسبتاً از لحاظ برنامه‌نویسی نیز ساده‌تر است. مشکل اصلی این روش در مسائل مهندسی کاربردی

[1] Finite Element
[2] Boundary Element
[3] Finite Difference(FD)
[4] Partial Differential Equations(PDE)
[5] Discretization
[6] Governing Equations
[7] Singular
[8] Unique Solution

این است که این روش برای مسائل با هندسه‌های پیچیده و نامنظم مناسب نیست. بعلاوه تغییر اندازه سلول‌های مختلف نیز در برخی نواحی خاص مثل مسائل شامل تمرکز تنش و امواج ضربه‌ای[1] مشکل است. بنابراین این روش برای مسائلی که شامل تغییرات سریع متغیرها هستند مناسب نمی‌باشد و امروزه برای حل مسائل انتقال حرارت و جریان سیالات بیشتر از مسائل تحلیل تنش کاربرد دارد. برای آشنائی با جزئیات بیشتر این روش، به کتاب‌های درسی زیادی که در این حیطه به نگارش درآمده مراجعه نمائید [2].



شکل 1-1- تقسیم بندی روش‌های عددی در مکانیک محیط‌های پیوسته[1]

روش المان محدود(FE)

در این روش، تمام دامنه حل به قسمت‌های کوچک محدودی تقسیم می‌شود (بنابراین المان محدود نامیده می‌شود). بر روی هر المان، رفتار به صورت معادلات حاکم (دیفرانسیلی) توصیف می‌شود. تمامی این المان‌های کوچک در نهایت تلفیق (اسمبل)

---

[1] Shock Waves

می‌شوند و ملزومات پیوستگی و تعادل بین المان‌های همسایه ارضا می‌گردد. شرایط مرزی مسئله اصلی به دستگاه معادلات اعمال می‌شود و یک جواب یکتا برای دستگاه معادلات کلی به دست می‌آید. در این روش دستگاه معادلات حاکم دارای ماتریس ضرائب تنک[1] می‌باشد. روش المان محدود برای مسائل مهندسی کاربردی با هندسه‌های پیچیده بسیار مناسب است. برای به دست آوردن دقت مناسب در نواحی با تغییرات شدید متغیرها می بایست از تعداد زیادی از المان‌های ریز استفاده نمود. برای واضح شدن روش برای خوانندگان محترم، گام‌های زیر مراحل مختلف یک فرمول‌بندی المان محدود نوعی را خلاصه می‌نماید:

1- تقسیم دامنه حل به المان‌های کوچک (محدود). برای مسائل دو بعدی این المان‌ها می‌توانند مثلثی و یا چهارضلعی باشند، برای مسائل سه بعدی نیز این المان‌ها می‌توانند بنا به نوع مسئله چهاروجهی و یا شش گوش انتخاب شوند.

2- تعریف رفتار متغیرها در داخل هر المان بوسیله تابع شکل مناسب.

انتخاب تغییرمکان‌ها در هر نقطه گره‌ها به عنوان متغیرهای مجهول و استفاده از توابع شکل برای توصیف تغییرات متغیرهای مسئله و هندسه مسئله در داخل هر المان (به عنوان نمونه تغییرات خطی یا مرتبه دوم و یا مرتبه های بالاتر). بکار بردن توابع شکل مرتبه بالاتر باعث استفاده از گره‌های بیشتر در داخل هر المان می‌شود. دقت حل را می توان توسط استفاده از تعداد زیاد المان‌های ساده(مانند المان خطی) و یا افزایش مرتبه توابع شکل(مانند استفاده از المان‌های مرتبه دو) افزایش داد.

3- توسط تغییرمکان‌ها، می‌توان تنش‌ها و کرنش‌ها را در هر المان با استفاده از روابط کرنش- تغییرمکان و قانون هوک [2](معادلات اصلی) بدست آورد. معادلات سازگاری به صورت خودکار در هر المان ارضاء خواهند شد زیرا تغییر مکان‌ها به عنوان مجهولات در نظر گرفته شده‌اند.

4- با استفاده از فرمول‌بندی (انرژی) تغییرات و یا استفاده از تعادل مستقیم نیروها می‌توان ماتریس سختی[3] را برای هر المان به صورت رابطه ذیل تعریف نمود:

---

[1] Sparse
[2] Hooke Law
[3] Stiffness Matrix

$$\sum_{m}[k]_m[\delta]_m=[F] \qquad (1\text{-}1)$$

که در آن m تعداد المان‌ها، $[k]_m$ سختی المان، $[\delta]_m$ بردار جابه‌جائی المان و $[F]$ برداری است که شامل نیروهای خارجی می‌باشد. برای مشخص نمودن ضریبی که در مقدار جابه‌جائی در یک گره خاص ضرب می‌شود، مجموع سختی المان‌ها بر روی کل دامنه که آن گره خاص را دارا می‌باشند محاسبه می‌گردد.

5- تلفیق (اسمبل) سیستم کلی دستگاه معادلات برای دامنه کلی حل. به علت اینکه مجموع سختی‌ها فقط برای المان‌هایی انجام می گیرد که گره خاصی را شامل می شوند بنابراین ماتریس سختی کل ماتریس تنک[1] خواهد بود.

6- اعمال شرایط مرزی: بدون اعمال شرایط مرزی، دستگاه معادلات حاصله تکین خواهد بود. با اعمال شرایط مرزی جوابی یکتا برای دستگاه معادلات جبری حاصل خواهد شد. شرایط مرزی می‌تواند به شکل تغییر مکان‌های معین شده، لغزش بر روی یک سطح صلب، فشار و یا تنش معلوم باشد. شرایط مرزی پیچیده‌تر در مسائل تماس رخ می‌دهد.

7- حل معادلات دستگاه جبری کلی برای تعیین تغییرمکان‌ها در هر نقطه گره. برای این امر هم می توان از روش حذف گوس(روش مستقیم) و هم روش‌های تکراری همانند گوس-سایدل (روش غیر مستقیم) استفاده نمود. انتخاب هر یک از این دو روش به اندازه ماتریس حل بستگی دارد.

8- محاسبه اطلاعات تکمیلی. در ابتدا تغییرمکان‌ها در هر نقطه گره محاسبه می‌گردد، نتایج تکمیلی مانند تنش‌های گره‌ها و المان‌ها، چگالی انرژی کرنش، ضرایب شدت تنش وغیره با مشخص بودن حل معلوم خواهد بود.

روش المان مرزی(BE)

همانطور که از نام روش پیداست، در این روش معادلات دیفرانسیل حاکم به اتحادهای انتگرالی تبدیل می‌شوند که بر روی سطح یا مرز اعمال می‌شوند. این انتگرال‌ها به صورت عددی بر روی مرز انتگرال‌گیری می‌شوند. در این رویکرد، مرز به بخش‌های کوچک (المان‌های مرزی) تقسیم شده و همانند سایر روش‌های عددی در

[1] Sparse

نهایت یک دستگاه معادلات جبری خطی حاصل می‌گردد که یک جواب یکتا خواهد داشت. روش المان مرزی به صورت هندسی و به سادگی برای هر شکل پیچیده مرزی قابل اعمال است و به راحتی بر آن منطبق خواهد بود. به علاوه چون همه تقریب‌ها منحصر به سطح می‌باشد، روش المان مرزی می‌تواند نواحی شامل تغییرات شدید متغیرها را با دقتی بهتر از روش المان محدود(FE) مدل نماید. این کتاب کلاً به فرمول‌بندی تحلیلی و پیاده‌سازی عددی روش المان مرزی (BE) می‌پردازد، هر چند قبل از آغاز بررسی دقیق وجزئی بهتر است که مراحلی که رویکرد المان مرزی(BE) شامل آن است را توضیح دهیم. از این رهگذر می‌توان به مقایسه کاملی با روش المان محدود (FE) دست یافت. مراحل ذیل، بخش‌های مختلف رویکرد المان مرزی(BE) را روشن می‌کنند:

1. ابتدا معادلات دیفرانسیلی شامل تغییرمکان‌ها بر روی دامنه حل بدست می آیند (که معادلات ناویر نامیده می‌شوند). برای انجام این امر تعاریف تغییر مکان-کرنش در معادلات قانون هوک جایگزین می‌گردند (معادلات اصلی) و سپس در معادلات دیفرانسیلی تعادل جایگزین می‌شوند.
2. سپس " حل اصلی[1]" برای معادلات دیفرانسیل بدست می‌آید. این حل به شکلی است که می‌بایست برای هر هندسه‌ای قابل اعمال باشد و بر پایه حل حاصل از اعمال یک بار نقطه‌ای در یک محیط نامتناهی استوار است (که حل کلوین[2] نامیده می‌شود). حل اصلی از مرتبه $1/r$ یا $\log(1/r)$ می‌باشد که در آن r فاصله فیزیکی بین نقطه اعمال نیرو (که نقطه بار p نامیده می‌شود) و هر نقطه دیگر بر روی مرز (که نقطه میدان Q نامیده می‌شود) خواهد بود.
3. استفاده از قضیه کار متقابل[3](قضیه بتی[4]): این قضیه بیان می‌دارد که اگر دو حالت تنش (a) و(b) موجود باشد که معادله تعادل را ارضا نمایند، آنگاه کار انجام شده توسط نیروهای سیستم (a) بر روی تغییر

[1] Fundamental Solution
[2] Kelvin Solution
[3] Reciprocal Work Theorem
[4] Bettie’s Theorem

مکان‌های سیستم (b) معادل با کار انجام شده توسط نیروهای سیستم (b) بر روی تغییر مکان‌های سیستم (a) خواهد بود، به صورت ذیل:

$$\sum_p F_p^{(a)} u_p^{(b)} = \sum_p F_p^{(b)} u_p^{(a)} \qquad (2\text{-}1)$$

که در آن P هر نقطه با نیروی F خواهد بود. اگر نیروهای خارجی فقط منحصر به سطح S باشد، آنگاه معادله انتگرالی ذیل بدست می آید:

$$\int_S t_i^{(a)} u_i^{(b)} dS = \int_S t_i^{(b)} u_i^{(a)} dS \qquad (3\text{-}1)$$

که در آن $i = 1,2,3$ (متناسب با محورهای مختصات x,y,z) خواهد بود. بردار کشش/فشار[1] نیز به صورت $\left(t_i = \sigma_{ij} n_j\right)$تعریف می‌گردد که در آن n_j بردار واحد عمود بر سطح و به سمت خارج سطح می‌باشد. فرض می‌کنیم که سیستم (a) حل اصلی (معلومات) و سیستم (b) مسئله واقعی(مجهولات) باشد. حاصل یک معادله انتگرال مرزی خواهد بود که تغییر مکان‌ها را با نیروهای کشش/فشار بر روی مرز (سطح) ارتباط می‌دهد.

سطح را به بخش‌ها و المان‌هائی تقسیم می‌کنیم برای توصیف متغیرها و هندسه‌ها برای هر المان از توابع شکل استفاده می‌نمائیم. این توابع شکل می‌توانند خطی، مرتبه دوم و یا مرتبه بالاتر باشند. در این روش، انتگرال‌گیری تحلیلی برای محاسبه انتگرال‌ها به علت پیچیدگی توابع انتگرال‌گیری توصیه نمی‌شود و به جای آن از انتگرال‌گیری عددی (روش گوس مربعی) استفاده می‌شود. در محاسبه انتگرال‌های تکین[2] وقتی نقطه گره‌ها به یکدیگر نزدیک باشند و یا نقطه نیروی p بر نقطه مرزی Q منطبق باشد می‌بایست تمهیدات خاصی را به کار برد. زیرا حل اصلی شامل جملاتی از مرتبه $(1/r)$ می‌باشد. با جمع نمودن همه انتگرال‌ها بر روی همه المان‌ها، انتگرال کلی سطح محاسبه می‌گردد. ماتریس حل با تکرار فرآیند انتگرال‌گیری در نقطه نیروی p که به صورت متوالی بر روی سطح لحاظ شده، بدست می آید. ابتدا نقطه نیروی p (حل اصلی) در نقطه 1 قرار داده می‌شود که یک مجموعه از معادلات را بدست می‌دهد. این مجموعه همه N متغیر مسئله را بر روی سطح به هم مرتبط می‌نماید. این مجموعه از معادلات در مسائل سه بعدی

[1] Traction Vector
[2] Singular Integral

شامل سه معادله می‌باشد. در ادامه نقطه نیروی p در نقطه 2 قرار می‌گیرد و این نیز منجر به یک مجموعه از معادلات دیگر در نقطه مذکور می‌شود که در این‌حالت نیز N متغیر مسئله توسط این معادلات به هم مرتبط می‌شوند. با قرار دادن نقطه نیروی p در ادامه فرآیند در نقاط متوالی تا نقطه N، همه N مجموعه معادلات تشکیل می‌شود. دستگاه معادلات خطی حاصله به شکل ذیل خواهد بود:

$$[A][u]=[B][t] \tag{4-1}$$

4. با اعمال شرایط مرزی، دستگاه معادله حاوی شرایط واقعی مسئله مورد نظر ما بدست می‌آید. شرایط مرزی می‌تواند شامل تغییرمکان معین، نیروی کشش/فشار معلوم، تنش معین و یا اتصال فنری (رابطه فنری بین نیروی کشش/فشار و تغییر مکان) باشد. معادله (1-4) را در ادامه به صورتی سامان‌دهی می‌کنیم که تمامی مجهولات در سمت چپ معادله و تمامی مقادیر معاوم در سمت راست معادله قرار بگیرند، داریم:

$$\left[A^*\right]\left[x\ \ \right]=\left[B^*\right]\left[y\ \ \right]=\left[c\ \ \right] \tag{5-1}$$

که در آن بردار مجهولات $[x]$ شامل ترکیبی از مجهولات تغییرمکان و نیروی کشش/فشار و بردار $[y]$ شامل همه مقادیر معین تغییرمکان‌ها و نیروهای کشش/فشار می‌باشد. بردار $[c]$ در سمت راست معادله، بردار ضرائب معلوم می‌باشد.

5. حل دستگاه معادلات خطی کلی. به علت اینکه ماتریس حل ماتریسی نامتقارن و پر از عناصر و ضرائب غیر صفر می‌باشد، از روش‌های حل مستقیم (همانند روش گوس) استفاده می‌شود.
6. محاسبه اطلاعات تکمیلی. از روی مقادیر محاسبه‌شده نیروهای کشش/فشار و تغییر مکان‌های مرزی، مقادیر تنش، کرنش، انرژی کرنش و ضرائب شدت تنش محاسبه می‌گردد. مقادیر تغییرمکان‌ها و نیروهای کشش/فشار در نقاط داخلی نیز به راحتی توسط مقادیر مرزی محاسبه شده بدست می‌آیند.

1-2- مروری بر توسعه روش المان مرزی

از قدیم روش‌های معادلات انتگرالی برای حل مسائل مقدار مرزی[1] برای مدت طولانی مطرح بوده است. در سال 1903، فردهولم[2] روش معادلات انتگرالی گسسته را در حل مسائل پتانسیل بکار گرفت که پایه ای را برای حل المان مرزی غیر مستقیم[3] بنا نهاد. این رویکرد غیر مستقیم نامیده می‌شود زیرا برای محاسبه کمیت‌های فیزیکی همانند تنش‌ها و تغییرمکان‌ها از جملات منبع و توابع چگالی غیرفیزیکی و موهومی استفاده می‌کند که معنای فیزیکی ندارند.

در سال 1886، سومیگلیانا[4] معادله انتگرالی را ارائه داد که مقادیر مرزی تغییر مکان‌ها و نیروهای کشش/فشار را به هم مرتبط می‌ساخت. معادله سومیگلیانا هسته اولیه فرمول‌بندی المان مرزی مستقیم[5] را بنا نهاد. این رویکرد در سراسر این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

از آن تاریخ تاکنون چندین مقاله و کتاب با موضوع معادلات انتگرالی در نظریه الاستیسیته و پتانسیل توسط ریاضیدانان برجسته ای چون کلاگ[6](1929)، موسخلیش‌ویلی[7](1953)، میخلین[8](1957) و کوپرادز[9](1965) به چاپ رسیده است. هرچند فرمول‌بندی، انتگرالی توسط روش‌های تحلیلی حل می‌شد که کاربرد این شیوه از حل را به مسائل ساده محدود می‌نمود. تا دهه شصت، هیچ تحقیق اصلی وجود نداشت که دامنه مسائل حل شده با معادلات انتگرالی را افزایش دهد و یا برای محاسبه معادلات انتگرالی، ایده بکار بردن الگوریتم‌های عددی را مطرح نماید. در اوایل دهه شصت، کامپیوترهای پرسرعت دیجیتال و روش‌های محاسبه عددی در مسائل و کاربردهای مهندسی بکار گرفته شدند. به طور خاص، روش المان محدود (FE) افراد بسیاری را به خود جذب کرد و مسائل مهندسی پیچیده توسط شبیه‌سازی کامپیوتری با دقت بالائی حل شدند.

---

[1] Boundary Value problems
[2] Fredholm
[3] Indirect BE
[4] Somigliana
[5] Direct BE
[6] Kellogg
[7] Muskhelishvili
[8] Mikhlin
[9] Kupradze

در سال 1963، انقلاب بزرگی در حل معادلات انتگرالی رخ داد وقتی جیسون[1] و سیم[2] دو مقاله کلاسیک را در این حیطه از علم منتشر نمودند. روش آنها گسسته‌سازی معادلات انتگرالی توسط المان‌های خطی مستقیم بود که توابع پتانسیل بر روی هر المان ثابت فرض شدند. آنها روش را برای حل مسائل پتانسیل دو بعدی بکار گرفتند که توسط معادله لاپلاس فرمول بندی شده بود.

المان‌ها بر حسب نقطه گره‌ها توصیف شدند و انتگرال‌ها با استفاده از قانون سیمپسون[3] محاسبه گردیدند. انتگرال‌های تکین نیز توسط روش‌های تحلیلی محاسبه شدند. رویکرد جیسون و سیم به صورت روش نیمه-مستقیم[4] تقسیم بندی می‌شود زیرا توابعی که برای فرمول بندی مسئله بکار گرفته شد توابعی موهومی نیستند و برای محاسبه مقادیر فیزیکی می‌توان از آنها مشتق و یا انتگرال گرفت.

روش معادلات انتگرالی به صورت مشابه توسط جیسون و پونتر[5](1963) برای حل مسائل پیچش شامل شفت‌های با سطح مقطع‌های منظم و متنوع بکار گرفته شد. همچنین هس[6] و اسمیت[7] (1967) برای مسائل جریان پتانسیل حول شکل‌های اختیاری و هرینگتون[8] و همکارانش برای مسائل دو بعدی مهندسی برق، روش معادلات انتگرالی را مورد استفاده قرار دادند.

اولین مقاله ای که رویکرد مستقیم حل معادلات انتگرالی را مد نظر قرار داد توسط ریزو[9] در سال 1967 منتشر گردید. در این رویکرد یک معادله انتگرالی بر روی مرز با استفاده از تغییر مکان‌ها و نیروهای کشش/فشار حل شد.

ایده ریزو بسیار بدیع و اصیل بود، او در مقاله خود از مشابهت بسیار زیاد بین نظریه پتانسیل و نظریه الاستیسیته کلاسیک بهره برد و از روش عددی برای حل مسئله استفاده نمود. او برای گسسته‌سازی مرز از المان‌های خطی مستقیم استفاده کرد و توابع (شامل تغییر مکان‌ها و نیروهای کشش/فشار نیز بر روی هر المان ثابت فرض شدند. برای

[1] Jaswon
[2] Symm
[3] Simpson
[4] Semi-Direct
[5] Ponter
[6] Hess
[7] Smith
[8] Harrington
[9] Rizzo