



دانشگاه تربیت مدرس شهید رجایی

استاتیک

تألیف:

مکالین و نلسون

ترجمه:

دکتر فرامرز آشنای قاسمی دکتر مهرداد نوری خاجوی

اعضای هیأت علمی دانشگاه تربیت مدرس شهید رجایی

سر شناسنامه	:	مک‌لین، ویلیام جی - (McLean, W. G. (William G
عنوان و نام پدید آور	:	استاتیک / تألیف مک‌لین و نلسون؛ ترجمه فرامرز آشنای قاسمی، مهرداد نوری خاجوی.
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، 1391.
مشخصات ظاهری	:	395 ص: مصور، جدول، نمودار.
شابک	:	978-600-6594-12-5
وضعیت فهرست نویسی	:	فیبا.
یادداشت	:	عنوان اصلی: Schaum's outline of theory and problems of engineering mechanics: statics and dynamics, 3th ed 1980
یادداشت	:	واژه‌نامه.
موضوع	:	مکانیک عملی
شناسه افزوده	:	نلسون، اریک ویلیام
شناسه افزوده	:	(Nelson, E. W. (Eric William
شناسه افزوده	:	آشنای قاسمی، فرامرز، 1347-، مترجم
شناسه افزوده	:	نوری خاجوی، مهرداد، 1340-، مترجم
شناسه افزوده	:	Noori Khajavi, Mehrdad
شناسه افزوده	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.
رده بندی کنگره	:	1391 5 لف 74 م / TA 350
رده بندی دیویی	:	620/105
شماره کتابشناسی ملی	:	3037793



دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

عنوان	:	استاتیک
ترجمه	:	دکتر فرامرز آشنای قاسمی و دکتر مهرداد نوری خاجوی (اعضای هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی)
ویراستار علمی	:	دکتر فرامرز آشنای قاسمی
ویراستار ادبی	:	شهرام طهماسبی
نوبت چاپ	:	اول - پاییز 1392
طراح جلد	:	شهرام طهماسبی
انتشارات	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
لیتوگرافی	:	نگین سبز
چاپ	:	برهان
ناظر چاپ	:	محمد معتمدی نژاد
کارشناس و صفحه‌آرا	:	نیره فیروزی
شمارگان	:	1000 جلد
قیمت	:	20.000 تومان
شابک	:	978-600-6594-12-5 ISBN: 978-600-6594-12-5

کلیه حقوق این اثر برای مؤلفین و دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی محفوظ است.

نشانی: تهران، لویزان - کد پستی 16788-15811 - صندوق پستی 163 - 16785 - تلفن: (2632) 9 - 22970060، 22970070
نمابر: 22970003، پست الکترونیکی: Publish@srutu.edu، وب سایت: http://Publish.srttu.edu

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
ج	پیشگفتار
ه	مقدمه
1	فصل 1- بردارها
31	فصل 2- عملیات روی بردار نیرو
51	فصل 3- برآیند سیستم نیروهای صفحه‌ای
69	فصل 4- برآیند سیستم نیروهای فضایی
87	فصل 5- تعادل سیستم نیروهای صفحه‌ای
123	فصل 6- خرپاها و کابل‌ها
153	فصل 7- تعادل در سیستم نیروهای فضایی
181	فصل 8- اصطکاک
225	فصل 9- گشتاورهای اول و مراکز هندسی
275	فصل 10- مطالب تکمیلی درباره تعادل تیرها
313	فصل 11- گشتاورهای سطح اینرسی
349	فصل 12- گشتاورهای جرم اینرسی
367	پیوست‌ها

پیشگفتار

این کتاب به عنوان مرجع درسی استاندارد طراحی شده و هدف آن کمک به دانشجویان رشته‌های مهندسی و علوم، جهت به‌دست آوردن اطلاعات کامل و کسب مهارت در مکانیک تحلیلی و کاربردی می‌باشد. کتاب براساس این عقیده نویسندگان که «مسائل حل شده متعدد یکی از بهترین روش‌های تشریح و اثبات اصول اساسی در ذهن می‌باشد» طراحی شده است. در این کتاب از هردو سیستم واحدهای SI و آمریکایی استفاده شده است. روش‌های برداری در فصولی کاربرد داشته‌اند که این روش‌ها باعث سادگی در تئوری و حل مسائل می‌شوند و در مسائلی که نیاز به روش‌های برداری نمی‌باشد، از شیوه‌های عددی بهره گرفته شده است. عناوین فصل‌ها در کلیه مراجع استاندارد مکانیک وجود دارد. هر فصل با تعاریف مربوط، اصول و قضایا شروع شده و در پی این مطالب مجموعه‌ای از مسائل حل شده و مسائلی که باید توسط خود دانشجو حل گردند، ارائه شده است. مسائل حل شده به تشریح و تثبیت تئوری‌های ارائه شده کمک می‌کنند. مثال‌های عملی و کاربردی نیز، نکات ظریفی را روشن کرده که دانشجو را قادر به استفاده از اصول اساسی این مبحث می‌کند. اثبات قضایا و استخراج فرمول‌ها نیز در ردیف برخی از مسائل حل شده قرار گرفته‌اند. بالاخره مسائل تکمیلی که باید توسط خود دانشجو حل گردد، دوره کاملی از مطالب هر فصل را عرضه می‌دارند.

دبلیو. جی. مک‌لین

ئی. دبلیو. نلسون

مقدمه

اگر نقطه اتکایی به دست آرم، زمین از جای خویش بجنبانم.

«رشمیدس»

بیان جمله فوق توسط بزرگترین مهندس و ریاضی‌دان قدیم نشان دهنده قدمت علم مکانیک می‌باشد. مکانیک اجسام صلب به عنوان یکی از قدیمی‌ترین علوم طبیعی به دو بخش استاتیک و دینامیک تقسیم می‌شود. استاتیک در مورد شرایط تعادل اجسام بحث کرده، حال آن که دینامیک به ارتباط بین نیروها، گشتاورهای وارد بر جسم و شتاب‌های خطی و زاویه‌ای ناشی از آنها می‌پردازد.

استاتیک یکی از دروس مشترک در کلیه رشته‌های مهندسی بوده و به‌واقع می‌توان آن را به عنوان مدخل تمامی دروس مهندسی در نظر گرفت. نظر به نقش و اهمیتی که این درس در ایجاد بینش و درک مهندسی در دانشجویان دارد؛ برآن شدیم تا یکی از کتب برجسته موجود در این زمینه را به فارسی ترجمه کنیم. کتابی که در دست دارید تألیف آقایان «مک‌لین» و «نلسون» بوده که اولی در دانشگاه و دومی در صنعت صاحب تجربه می‌باشند. کتاب حالتی خودآموز داشته و استفاده از آن نیاز به استاد ندارد. هر فصل با تعاریف دقیق از مفاهیم اساسی، اثبات قضایا، و به‌دست آوردن فرمول‌های اصلی شروع شده، سپس برای درک بهتر این مطالب، شمار زیادی مسأله به‌طور کامل حل شده است. اما از آنجا که قدرت و توانایی در حل مسائل تنها با مطالعه مسائل حل شده به‌دست نمی‌آید، بلکه نیازمند حل آن توسط خود دانشجو می‌باشد، تعداد زیادی مسأله بدون حل نیز تنها با پاسخ نهایی‌شان داده شده است. از دانشجویان عزیز اکیداً درخواست می‌شود پس از مطالعه متن درس و مسائل حل شده، مسائل فاقد حل همراه با پاسخ نهایی را نیز حل نمایند. توانایی دانشجو در حل این مسائل نشان دهنده درک صحیح مطالب بوده و به واقع جواز عبور دانشجو به فصل بعدی می‌باشد. در صورتی که دانشجو قادر به حل مسائل آخر هر فصل نباشد، از او تقاضا می‌شود فصل مزبور و مسائل حل شده آن را یک بار دیگر، ولی با دقت بیشتر خوانده، و این عمل را تا زمانی که قادر به حل مسائل انتهایی آن فصل شود، تکرار نماید.

از آنجا که هیچ اثری بدون لغزش و خطا نمی‌باشد، از دانشجویان عزیز و استادان گرانقدر درخواست می‌شود هر موردی در ارتباط با بالا بردن کیفیت این کتاب به نظرشان می‌رسد، منت گذاشته و با مترجمان در میان گذارند.

«جورج برنارد شاو» هنگام گشایش یکی از نمایشنامه‌های خود دو بلیط به همراه کارت دعوتی با این مضمون برای «وینستون چرچیل» ارسال داشت: «امشب نخستین شب اجرای این نمایش است. از شما دعوت می‌کنم با یکی از دوستان تان برای دیدن نمایش تشریف بیاورید. البته اگر دوستی هم داشته باشید!» چرچیل نیز چنین پاسخ داد: «متأسفانه امشب به علت مشغله زیاد معذورم. شب دوم نمایش خدمت می‌رسم. البته اگر شب دومی هم در کار باشد!» حال ما نیز چنین است! انشا... اگر چاپ دومی در کار باشد، نظرها و پیشنهادهای شما سروران گرامی مورد توجه قرار خواهد گرفت.

دکتر مهرداد نوری خاجوی

دکتر فرامرز آشنای قاسمی

فصل 1

بردارها

1-1. تعاریف

کمیت‌های عددی، مانند زمان، حجم، انرژی، جرم، وزن حجمی و کار تنها دارای مقدار می‌باشند. عددی‌ها را می‌توان به کمک روش‌های معمولی جمع با یکدیگر جمع و تفریق نمود، مانند:

$$14 \text{ kg} - 5 \text{ kg} = 9 \text{ kg}, \quad 2 \text{ sec} + 7 \text{ sec} = 9 \text{ sec}$$

کمیت‌های برداری، مانند نیرو، جابه‌جایی، سرعت و ضربه هم دارای اندازه و هم دارای جهت¹ می‌باشند. هر بردار را با گذاشتن یک فلش بر روی یک امتداد نمایش می‌دهند. نوک فلش نمایشگر جهت و طول آن نمایانگر اندازه بردار می‌باشد؛ مانند $\vec{P}$. اندازه یک بردار نیز به این شکل ارائه می‌گردد: $|\vec{P}|$ یا P .

بردار آزاد را می‌توان به هر نقطه دلخواهی از فضا انتقال داد، بدون اینکه اندازه یا جهت آن تغییر یابد.

بردار لغزان را نیز می‌توان به هر نقطه دلخواهی در امتداد راستای آن انتقال داد. بنابر قضیه انتقال، اثر خارجی یک بردار لغزان، ثابت باقی می‌ماند. بردار ثابت را نمی‌توان انتقال داد.

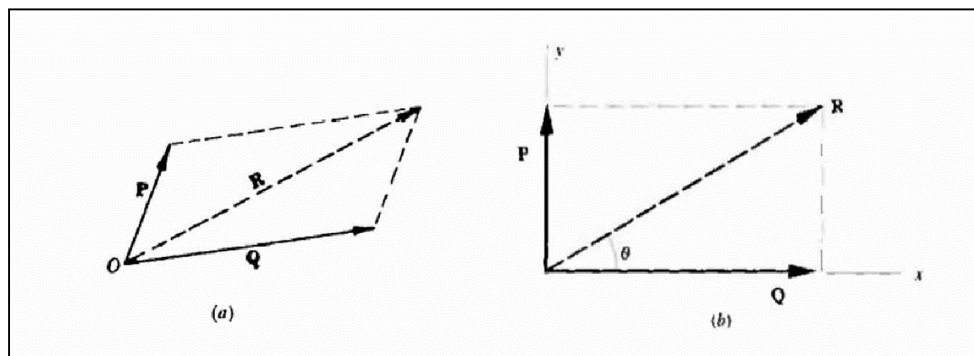
بردار یکه برداری است که طول آن برابر مقدار واحد باشد.

بردار قرینه $\vec{P}$ بردار $-\vec{P}$ می‌باشد که دارای اندازه و امتداد یکسان، ولی جهت متضاد می‌باشد. برآیند یک سیستم بردارها، حداقل تعداد بردارهایی است که بتوان آنها را به جای سیستم داده شده جایگزین نمود.

¹ از جهت دو مفهوم دریافت می‌شود. یکی امتدادی (زاویه‌ای) که راستای بردار با یک خط مرجع معین می‌سازد و دیگری جهت بردار در امتداد راستای بردار.

1-2. جمع دو بردار

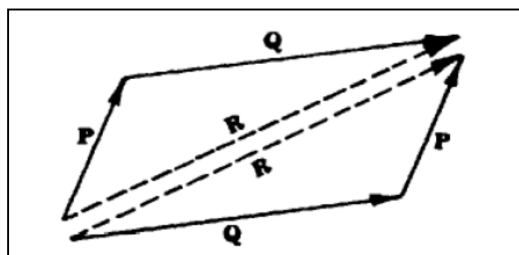
الف) قانون متوازی‌الاضلاع بیان می‌کند که برآیند $\vec{R}$ حاصل از دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ برابر با قطر متوازی‌الاضلاع است که $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ دو ضلع مجاور آن باشند. سه بردار $\vec{P}$ ، $\vec{Q}$ و $\vec{R}$ (شکل 1-1) متقارب می‌باشند.



شکل 1-1

ب) قانون مثلث: ابتدای یکی از بردارها را روی نوک فلش بردار دیگر قرار دهید. حال خطی که

ابتدای بردار اول را به نوک فلش بردار دوم وصل کند، برآیند بردارها می‌باشد. قانون مثلث از قانون متوازی‌الاضلاع پیروی می‌کند. همان‌گونه که در شکل (2-1) نیز نشان داده شده است، اضلاع روبه‌رو در یک متوازی‌الاضلاع بردارهای آزاد می‌باشند.



شکل 2-1

پ) جمع برداری دارای خاصیت جابه‌جایی می‌باشد، یعنی:

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$$

3-1. تفریق یک بردار

تفریق یک بردار با جمع قرینه آن بردار انجام می‌گیرد، یعنی:

$$\vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} + (-\vec{Q})$$

همچنین:

$$-(\vec{P} + \vec{Q}) = -\vec{P} - \vec{Q}$$

4-1. بردار صفر

بردار صفر هنگامی به وجود می‌آید که یک بردار از خودش کم شود، یعنی:

$$\vec{P} - \vec{P} = 0$$

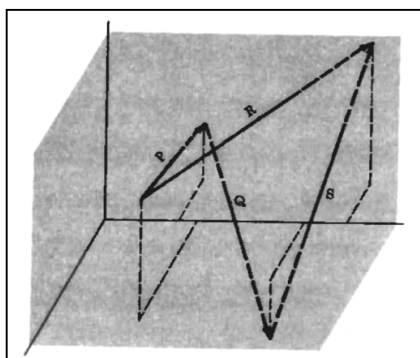
چنین برداری بردار خنثی نیز نامیده می‌شود.

5-1. ترکیب بردارها

ترکیب بردارها همان فرآیند تعیین برآیند یک سیستم از بردارها می‌باشد. یک چندضلعی برداری که از اتصال پیاپی انتهای یک بردار به نوک فلش بردار قبلی حاصل گردیده، در شکل (3-1) نشان داده شده است. برآیند این سیستم، در نتیجه اتصال ابتدای اولین بردار به نوک فلش آخرین بردار به دست آمده است. همان‌گونه که بعداً نشان داده می‌شود، کلیه سیستم‌های برداری را نمی‌توان با یک بردار منفرد نمایش داد. از آنجا که ترتیب بردارهای رسم شده مهم نمی‌باشد، برای سه بردار داده شده $\vec{P}$ ، $\vec{Q}$ و $\vec{S}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{S} \\ &= \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{S}) = (\vec{P} + \vec{S}) + \vec{Q}\end{aligned}$$

که می‌توان معادله فوق را برای هر تعداد دلخواهی از بردارها بسط داد.



شکل 3-1

1-6. ضرب کمیت‌های برداری در عددی

الف) حاصلضرب کمیت برداری $\vec{P}$ در کمیت عددی m برابر با بردار $m\vec{P}$ می‌باشد، که اندازه آن m برابر اندازه $\vec{P}$ و جهت آن با توجه به مثبت یا منفی بودن m ، به ترتیب هم‌جهت یا مخالف جهت بردار $\vec{P}$ خواهد بود.

ب) اعمال دیگر قابل انجام توسط کمیت‌های m و n عبارتند از:

$$\begin{aligned}(m+n)\vec{P} &= m\vec{P} + n\vec{P} \\ m(\vec{P} + \vec{Q}) &= m\vec{P} + m\vec{Q} \\ m(n\vec{P}) &= (mn)\vec{P}\end{aligned}$$

1-7. دستگاه مختصات متعامد بردارهای یکه

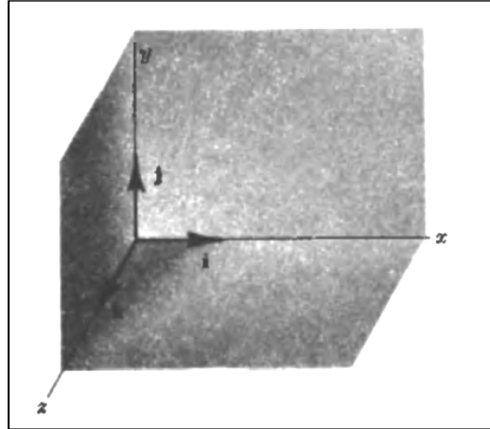
دستگاه مختصات متعامد بردارهای یکه $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به ترتیب با رسم بردارهای یکه در امتداد محورها x ، y و z به وجود می‌آیند. یک دستگاه محورهایی راستگرد در شکل (1-4) نشان داده شده است.

بردار $\vec{P}$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

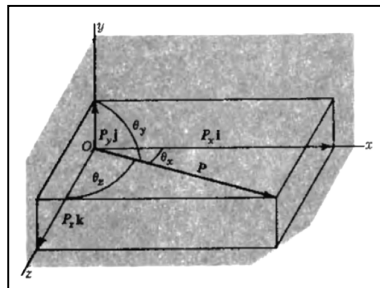
$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

در رابطه فوق $P_x \vec{i}$ ، $P_y \vec{j}$ و $P_z \vec{k}$ به ترتیب مؤلفه های $\vec{P}$ در امتداد محورهای x ، y و z می باشند (شکل 4-1).
توجه داشته باشید که:

$$P_x = P \cos \theta_x, \quad P_y = P \cos \theta_y, \quad P_z = P \cos \theta_z$$



شکل 4-1



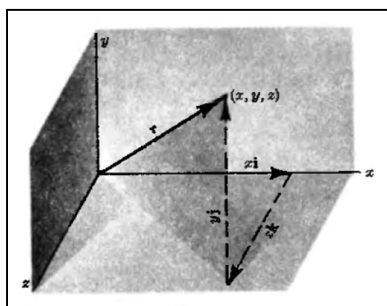
شکل 5-1

8-1. بردار موقعیت

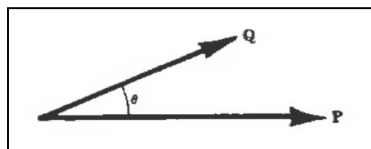
بردار موقعیت $\vec{r}$ یک نقطه (x, y, z) را در فضا می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

که طول بردار $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ می باشد (شکل 6-1).



شکل 6-1



شکل 7-1

9-1. ضرب نقطه‌ای یا ضرب عددی

ضرب نقطه‌ای یا ضرب عددی دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ که به صورت $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ نوشته می‌شود، یک کمیت عددی بوده، که به صورت حاصلضرب اندازه‌های دو بردار ضربدر کسینوس زاویه میان آنها θ (شکل 7-1) تعریف می‌شود؛ بنابراین:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta$$

قوانین زیر (m یک کمیت عددی است) برای ضرب نقطه‌ای یا عددی برقرار است:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{P} \cdot (\vec{Q} + \vec{S}) = \vec{P} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \vec{S}$$

$$(\vec{P} + \vec{Q}) \cdot (\vec{S} + \vec{T}) = \vec{P} \cdot (\vec{S} + \vec{T}) + \vec{Q} \cdot (\vec{S} + \vec{T}) = \vec{P} \cdot \vec{S} + \vec{P} \cdot \vec{T} + \vec{Q} \cdot \vec{S} + \vec{Q} \cdot \vec{T}$$

$$m(\vec{P} \cdot \vec{Q}) = (m\vec{P}) \cdot \vec{Q} = \vec{P} \cdot (m\vec{Q})$$

از طرفی چون $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامد هستند، می‌توان نوشت:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$$

همچنین اگر:

$$\vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k} \text{ و } \vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

می توان نوشت:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\vec{P} \cdot \vec{P} = P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

اندازه مؤلفه های بردار $\vec{P}$ در امتداد محورهای متعامد را می توان به شکل زیر نمایش داد:

$$P_x = \vec{P} \cdot \vec{i} \quad P_y = \vec{P} \cdot \vec{j} \quad P_z = \vec{P} \cdot \vec{k}$$

و برای مثال:

$$\vec{P} \cdot \vec{i} = (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \cdot \vec{i} = P_x + 0 + 0 = P_x$$

اندازه بردار $\vec{P}$ در امتداد هر خط دلخواهی مثل L را می توان به صورت $\vec{P} \cdot \vec{e}_L$ نمایش داد، که در این رابطه $\vec{e}_L$ بردار یکه در امتداد خط L می باشد (دربرخی از کتب از نماد $\vec{u}$ برای نمایش بردار یکه استفاده گردیده است). در شکل (8-1) یک صفحه از انتهای بردار $\vec{P}$ ، یعنی نقطه A و یک صفحه دیگر از نوک فلش بردار $\vec{P}$ ، یعنی نقطه B عبور داده شده است. البته هر دوی این صفحات بر خط L عمود می باشند. این صفحات خط L را در نقاط C و D قطع می کنند. بردار $\vec{CD}$ در امتداد خط L بوده، اندازه آن برابر با $\vec{P} \cdot \vec{e}_L$ می باشد.

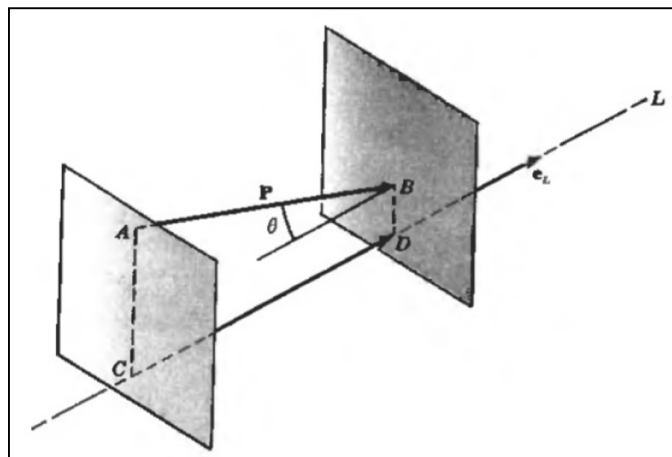
مثال 1-1. بردار یکه $\vec{e}_L$ را برای خط L که از نقطه $(2,3,0)$ آغاز شده، از نقطه $(-2,4,6)$ عبور می کند بنویسید. سپس تصویر بردار $\vec{P} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ را در امتداد خط L به دست آورید.

خط L در جهت x از $+2$ تا -2 (یعنی به اندازه -4) و در جهت y از 3 تا 4 (یعنی $4-3=+1$) و در جهت z از 0 تا 6 (یعنی $6-0=+6$) تغییر می کند؛ لذا بردار یکه آن برابر می گردد با:

$$\begin{aligned} \vec{e}_L &= \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + (+1)^2 + (+6)^2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{53}} \vec{j} + \frac{6}{\sqrt{53}} \vec{k} \\ &= -0.549 \vec{i} + 0.137 \vec{j} + 0.823 \vec{k} \end{aligned}$$

بنابراین تصویر بردار $\vec{P}$ برابر خواهد بود با:

$$\vec{P} \cdot \vec{e}_L = 2(-0.549) + 3(0.137) - 1(0.823) = -1.41$$



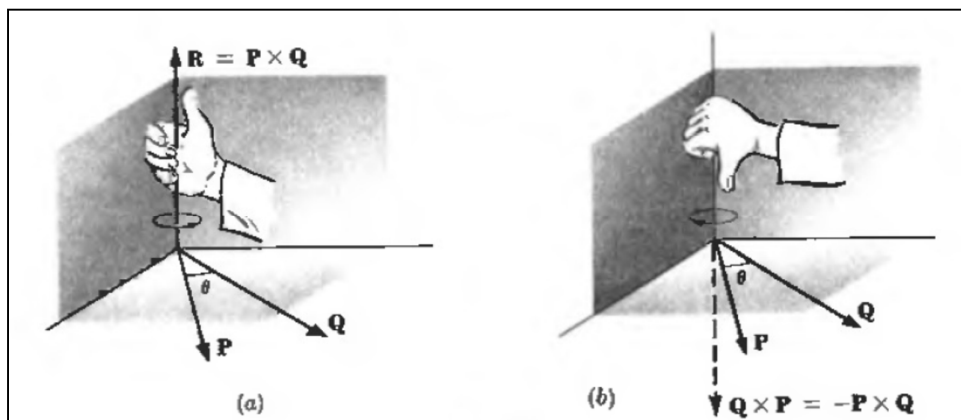
شکل 8-1

10-1. ضرب برداری

ضرب برداری دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ که به صورت $\vec{P} \times \vec{Q}$ نوشته می‌شود، یک کمیت برداری بوده، برابر با بردار $\vec{R}$ می‌باشد. اندازه این بردار برابر با حاصلضرب اندازه دو بردار در سینوس زاویه کوچکتر میان آنها θ است. بردار $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q}$ عمود بر صفحه $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ بوده، جهت آن در جهت پیشروی یک پیچ راستگرد در هنگامی است که از $\vec{P}$ به $\vec{Q}$ و در جهت زاویه کوچکتر θ پیچانده شود. بنابراین اگر $\vec{e}$ نمایانگر جهت $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q}$ باشد، حاصلضرب برداری را می‌توان به شکل زیر نیز نمایش داد:

$$\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = (PQ \sin \theta) \vec{e} \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

شکل (9-1) نمایشگر آن است که $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$ (یعنی ضرب برداری دو بردار دارای خاصیت جابه‌جایی نمی‌باشد).



شکل 9-1

قوانین زیر در صورتی که m یک کمیت عددی باشد برای ضرب برداری برقرار است:

$$\vec{P} \times (\vec{Q} + \vec{S}) = \vec{P} \times \vec{Q} + \vec{P} \times \vec{S}$$

$$(\vec{P} + \vec{Q}) \times (\vec{S} + \vec{T}) = \vec{P} \times (\vec{S} + \vec{T}) + \vec{Q} \times (\vec{S} + \vec{T}) \\ = \vec{P} \times \vec{S} + \vec{P} \times \vec{T} + \vec{Q} \times \vec{S} + \vec{Q} \times \vec{T}$$

$$m(\vec{P} \times \vec{Q}) = (m\vec{P}) \times \vec{Q} = \vec{P} \times (m\vec{Q})$$

از طرفی چون $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامد هستند، می توان نوشت:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

همچنین اگر:

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}, \quad \vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}$$

می توان نوشت:

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \vec{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \vec{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

برای اثبات رابطه بالا می توانید به مسأله 12-1 مراجعه کنید.

11-1. تحلیل برداری

الف) مشتق بردار $\vec{P}$ که نسبت به یک کمیت عددی مانند زمان t متغیر می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید که $\vec{P} = \vec{P}(t)$ یعنی $\vec{P}$ تابعی از زمان t باشد. در صورت ایجاد تغییراتی به میزان $\Delta \vec{P}$ در $\vec{P}$ در هنگامی که زمان از t به $(t + \Delta t)$ تغییر می‌کند، به دست می‌آید:

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)$$

سپس:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t}$$

حال اگر $\vec{P}(t) = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$ بوده که در آن P_x ، P_y و P_z توابعی از زمان t می‌باشند، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(P_x + \Delta P_x)\vec{i} + (P_y + \Delta P_y)\vec{j} + (P_z + \Delta P_z)\vec{k} - P_x \vec{i} - P_y \vec{j} - P_z \vec{k}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x \vec{i} + \Delta P_y \vec{j} + \Delta P_z \vec{k}}{\Delta t} \\ &= \frac{dP_x}{dt} \vec{i} + \frac{dP_y}{dt} \vec{j} + \frac{dP_z}{dt} \vec{k} \end{aligned}$$

البته اعمال زیر معتبر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{P} + \vec{Q}) &= \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{P} \cdot \vec{Q}) &= \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{P} \times \vec{Q}) &= \frac{d\vec{P}}{dt} \times \vec{Q} + \vec{P} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\psi \vec{P}) &= \psi \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \vec{P} \end{aligned}$$

(ψ تابع عددی از t می‌باشند.)

ب) انتگرال بردار $\vec{P}$ که نسبت به یک کمیت عددی مانند زمان t متغیر می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید که $\vec{P} = \vec{P}(t)$ یعنی $\vec{P}$ تابعی از زمان باشد، آنگاه:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{P}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) dt$$