ریاضیات ترسیمی

تألیف:

محمد حسین مصباحی

عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی

اشرف حنیفه

سر شناسه : مصباحی،محمد حسین،۱۳۳۵ .
عنوان و نام پدید آور : ریاضیات ترسیمی/ مؤلفان محمد حسین مصباحی، اشرف حنیفه.
مشخصات نشر : تهران : دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی،۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری : ۱۹۲ ص.: مصور.
شابک :۹-۸۴-۲۶۵۱-۹۶۴-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : ریاضیات
موضوع : هندسه ترسیمی
شناسه افزوده : حنیفه، اشرف، ۱۳۶۴-
شناسه افزوده : دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
رده بندی کنگره : ۱۳۹۰ ۹ ر۵۴ م QA۳۷/۲/
رده بندی دیویی : ۵۱۰
شماره کتابشناسی ملی : ۲۲۹۹۲۴۲

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

عنوان : ریاضیات ترسیمی
تالیف : محمد حسین مصباحی/ اشرف حنیفه
نوبت چاپ : اول، ۱۳۹۰
انتشارات : دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
لیتوگرافی : رضا
چاپ : ناطقی
ویراستار : یداله بهمنی مطلق
ناظرفنی : غلامرضا کارگریان مروستی
طرح جلد : دلربا جعفری
شمارگان : ۱۰۰۰ جلد
قیمت :۶۰۰۰ تومان
شابک : ۹ – ۸۴– ۲۶۵۱ – ۹۶۴ – ۹۷۸ ISBN: 978-964-2651-84 - 9

کلیهٔ حقوق این اثر برای مؤلف و دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی محفوظ است.
نشانی: تهران، لویزان – کد پستی ۱۶۷۸۸ – صندوق پستی ۱۶۳ – ۱۶۷۸۵ – تلفن: ۹ – ۲۲۹۷۰۰۶۰
نمابر: ۲۲۹۷۰۰۷۰ پست الکترونیک sru@srttu.edu

فهرست عناوین

فصل اول: محاسبات ترسیمی ۷
مقدمه ۷
کاغذ شطرنجی ۸
کاغذهای میلی‌متری ۹
کاغذ نیم‌لگاریتمی ۱۰
کاغذ لگاریتمی ۱۳
سایر کاغذها ۱۴
مقیاس ۱۵
محاسبات ۱۷
چهار عمل اصلی به روش ترسیمی ۱۹
جمع چند حاصل‌ضرب ۲۷
قضایای فیثاغورث ۳۲
پرسش و تمرین ۴۰

فصل دوم: معادلات ۴۱
معادلات درجه اول ۴۱
معادلات چند مجهولی درجه اول ۴۳
روش حذف یک پارامتر بین دو معادله درجه اول ۴۶
حل تحلیلی به روش کرامر ۴۹
حل ترسیمی ۵۰
حل معادلات درجهٔ دوم ۵۳
حل معادلات درجهٔ سوم ۵۵

حل معادلات درجهٔ چهارم ۵۸
تمرین ۶۲

فصل سوم: نیرو ۶۵
تعریف نیرو ۶۵
کمیّت‌های اسکالر و برداری ۶۵
جمع بردارها به روش متوازی‌الاضلاع و مثلثی ۶۷
تفاضل دو بردار ۶۷
نیروهای هم رأس ۶۸
جسم تحت تاثیر دو نیرو ۷۹
جسم تحت تاثیر سه نیرو ۷۹
روش ماکسول در تعیین نیروها ۸۵
تمرین ۹۰

فصل چهارم: مشتق و انتگرال ۹۷
مشتق ۹۷
انتگرال ۱۰۳
تمرین ۱۱۴

فصل پنجم: توابع و معادلات تجربی ۱۱۹
توابع خطی یا توابع معمولی ۱۱۹
توابع نمایی ۱۲۰
توابع توانی ۱۲۲
معادلات تجربی ۱۲۳
رسم نمودار ۱۲۴
طریقه به دست آوردن عرض از مبدأ در خارج از کاغذ مدرج ۱۳۹
تمرین ۱۴۴

فصل ششم: نوموگرام‌ها و دیاگرام‌ها ۱۴۵
خط‌کش ۱۴۶
ضریب نسبی (مدول) ۱۴۶
نوموگرام (Nomogram) ۱۴۹
دیاگرام $a = b + c$ ۱۵۴
تمرین ۱۵۷
ترسیم دیاگرام برای ماشین‌ها ۱۵۷
دیاگرام لگاریتمی ۱۶۴
نوموگرام جمع ۱۷۴
نوموگرام ضرب ۱۷۸
نوموگرام نسبت (معکوس) ۱۸۳
نوموگرام جمع مرکب ۱۸۶
تمرین ۱۸۸
منابع و مراجع ۱۹۱

فصل اول

محاسبات ترسیمی

مقدمه

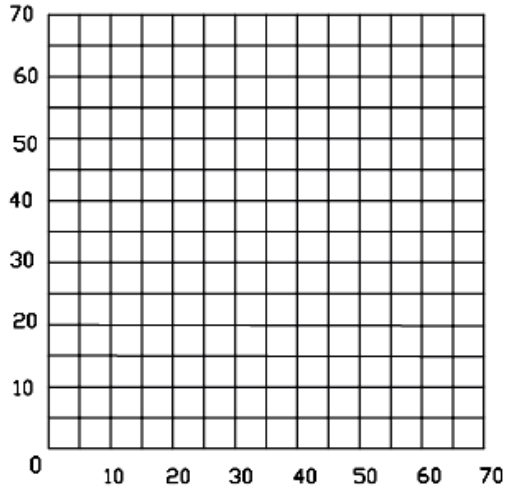
ریاضیات ترسیمی یکی از شاخه‌های علم ریاضی است که به روش ترسیمی به حل مسائل ریاضی می‌پردازد. این شاخه از علم مانند علوم دیگر ابتدا به مسائل پایه و اساسی مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم می‌پردازد؛ سپس مسائل پیشرفته‌تری مانند معادلات، توابع، مشتق، انتگرال و ... را بررسی می‌کند. با استفاده از قوانین ریاضیات ترسیمی می‌توان به حل مسائل علوم مختلفی مانند استاتیک، دینامیک و ... پرداخت و رابطه میان علوم مختلف را به وضوح مشاهده نمود.

اساس کار ریاضیات ترسیمی، استفاده از پاره‌خط به جای عدد است. ریاضیات ترسیمی، همان‌طور که از نامش پیدا است، با استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری و رسم به حل مسائل می‌پردازد و این خود علاوه بر مهارت کاربر در استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری و رسم، مستلزم دقت بالای او نیز می‌باشد. این شاخه از علم ریاضی این امکان را فراهم می‌کند که برخی از مسائل را که حل آنها به روش تحلیلی تقریباً

غیرممکن است، با استفاده از قوانین ریاضیات ترسیمی به سادگی حل نمود. همچنین به کمک نمودارها و دیاگرام‌ها و نوموگرام‌ها می‌توان بسیاری از داده‌های آماری و پدیده‌ها را به صورتی کاملاً قابل درک ارائه نمود.
انجام محاسبات ترسیمی مستلزم دقت بالایی است، که این امر در کاغذهای سفید به دشواری میسر می‌گردد و این خود ضرورت استفاده از کاغذهایی با درجه‌بندی‌های مختلف را ایجاب می‌کند. انواع مختلف این کاغذها عبارتند از:

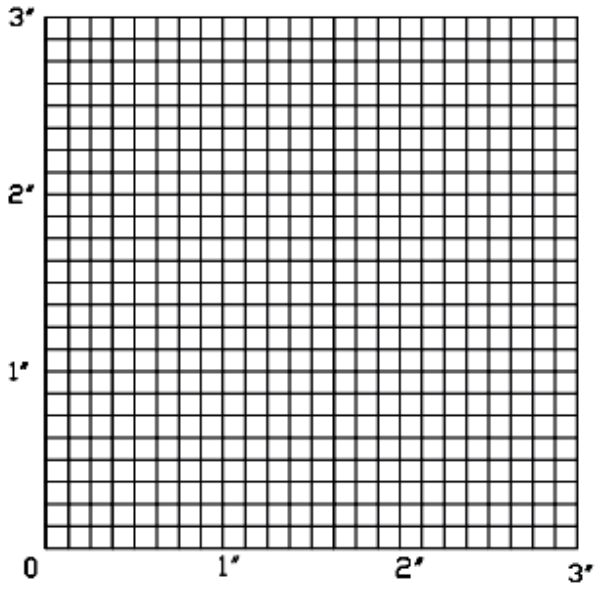
۱- کاغذ شطرنجی

کاغذ شطرنجی ساده‌ترین نوع کاغذهای ترسیم می‌باشد که از خانه‌های این کاغذ شامل مربع‌شکل با اندازه‌های مختلف تشکیل می‌شود. اضلاع این مربع‌ها می‌توانند با واحد میلی‌متر و یا اینچ درجه‌بندی شوند. این نوع کاغذ در شکل‌های a(۱-۱)و b(۱ -۱) آورده شده است.



شکل a (۱-۱)

کاغذ شطرنجی با مربع‌هایی به ضلع ۵ میلی‌متر

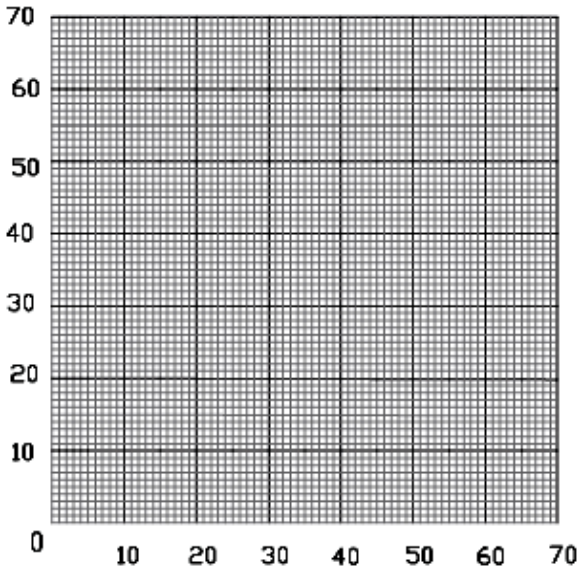


شکلb (۱-۱)

کاغذشطرنجی با مربع‌هایی به ضلع $\frac{1}{8}''$

۲- کاغذهای میلی‌متری

این کاغذها با مربع‌هایی به ضلع یک تا دو میلی‌متر مدرج شده‌اند. برای سهولت کار خطوطی که سانتی‌متر را مشخص می‌کند، با خط ضخیم‌تر ترسیم می‌شوند. در مواردی نیز خطوطی که فاصله ۵ سانتی‌متر را مشخص می‌کند، ضخیم‌تر ترسیم می‌شوند.



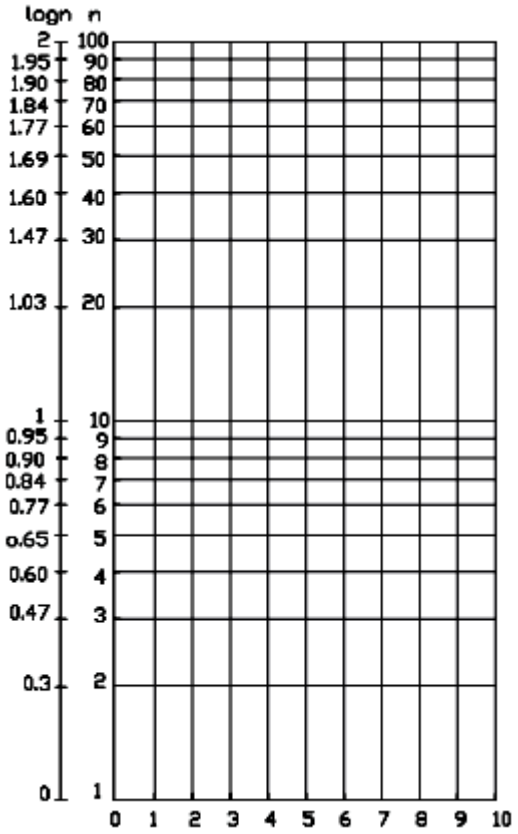
شکل(۲ -۱)
کاغذ میلی‌متری

۳- کاغذ نیم‌لگاریتمی

یک ضلع کاغذ نیم‌لگاریتمی به‌صورت لگاریتمی و ضلع دیگر بصورت میلی‌متری مدرج شده است. همان‌طور که در شکل (۱-۳) پیداست، در محور لگاریتمی بجای خود عدد، لگاریتم عدد برده می‌شود. باید توجه کرد که تقسیم‌بندی محور میلی‌متری از عدد صفر شروع می‌شود و با توجه به اینکه

$$\log 1 = 0 \qquad \log 10 = 1 \qquad \log 100 = 2 \qquad , \qquad \ldots$$

لذا تقسیم‌بندی محور لگاریتمی از عدد یک شروع می‌گردد؛ در نتیجه در کاغذ نیم‌لگاریتمی، روی محور میلی‌متری اعداد را به‌صورت معمول نشان می‌دهیم و روی محور لگاریتمی برای ساده‌تر شدن، علامت لگاریتم را حذف می‌کنیم.



شکل(۱-۳)

کاغذ نیم لگاریتمی

از این نوع کاغذها بیشتر برای رسم توابع نمایی استفاده می‌شود که در آینده بطور مشروح توضیح خواهیم داد.

نحوه ایجاد یک محور لگاریتمی

یک واحد لگاریتمی را متناسب با داده‌های موجود در مسأله، می‌توان به طور دلخواه انتخاب نمود. به طور مثال اگر یک واحد لگاریتمی را مساوی ۱۵۰ میلی‌متر در نظر بگیریم، برای مدرج کردن می‌توان لگاریتم یک تا ده را در طول مربوطه ضرب کرد و اندازه را روی محور جدا نمود.(شکل ۱-۴) مثلاً برای مدرج کردن یک واحد لگاریتمی برابر ۱۵۰ میلی‌متر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$\log 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \times 150 = 0$

$\log 2 = 0.3 \quad \Rightarrow \quad 0.3 \times 150 = 45$

$\log 3 = 0.477 \quad \Rightarrow \quad 0.477 \times 150 = 71.55$

$\log 4 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad 0.6 \times 150 = 90$

$\log 5 = 0.699 \quad \Rightarrow \quad 0.699 \times 150 = 104.85$

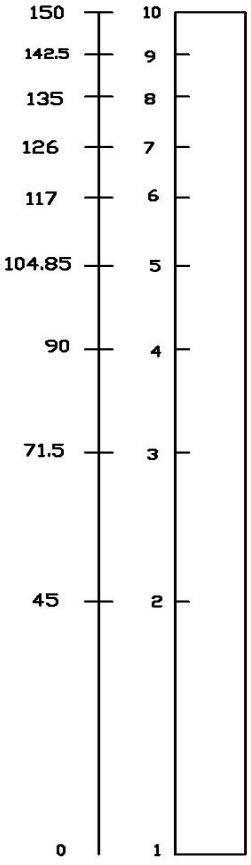
$\log 6 = 0.78 \quad \Rightarrow \quad 0.78 \times 150 = 117$

$\log 7 = 0.84 \quad \Rightarrow \quad 0.84 \times 150 = 126$

$\log 8 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad 0.9 \times 150 = 135$

$\log 9 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad 0.95 \times 150 = 142.5$

$\log 10 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \times 150 = 150$

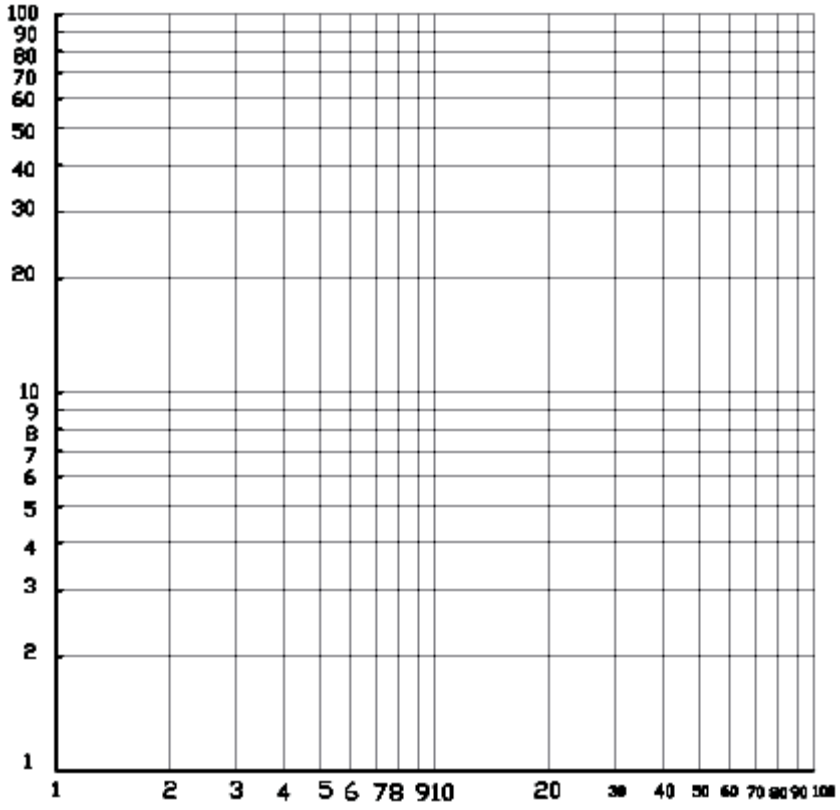


شکل(۱-۴)کاغذ نیم لگاریتمی

۴- کاغذ لگاریتمی

هر دو محور کاغذ لگاریتمی دارای تقسیمات لگاریتمی می‌باشد.

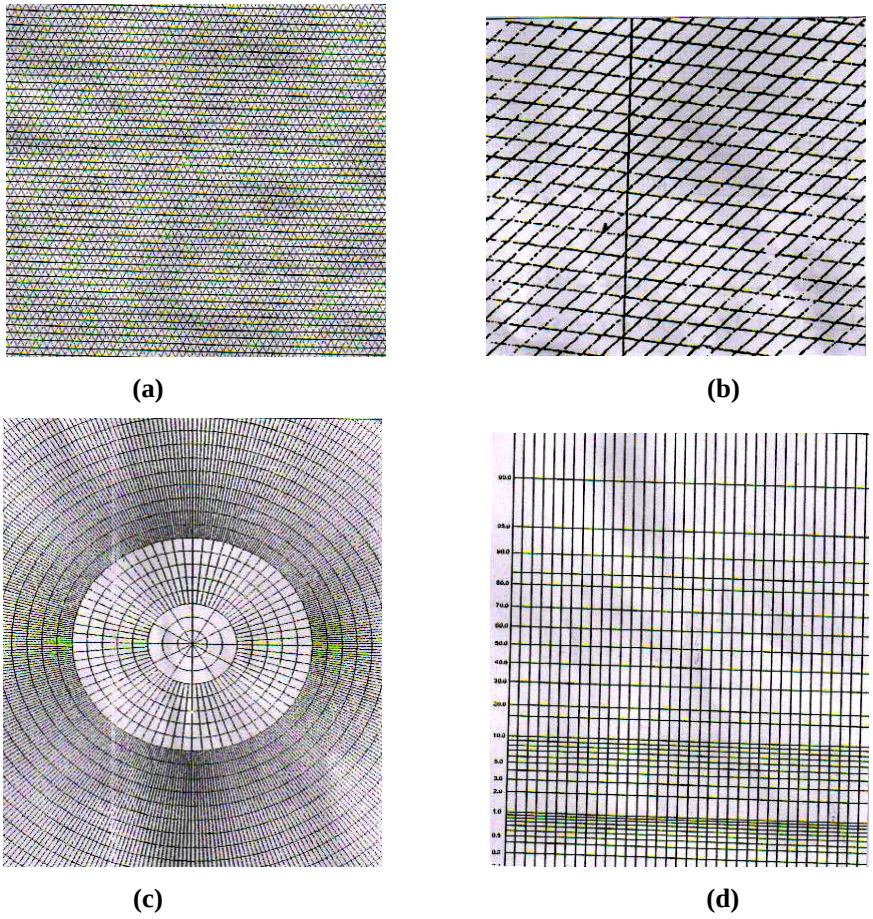
از این نوع کاغذ برای رسم توابع توانی استفاده می‌شود؛ چرا که این‌گونه توابع در کاغذ تمام لگاریتمی به صورت خط نمایان می‌گردد در نتیجه ترسیم ساده‌تر شده و دقت نیز افزایش می‌یابد. این مطلب در آینده به طور کامل تشریح می‌شود.



شکل (۱-۵) کاغذ لگاریتمی

سایر کاغذها

جهت ثبت و ترسیم نمودارها،کاغذهای متنوع دیگری هم وجود دارد که می‌توان از کاغذ قطبی، کاغذ احتمالات،کاغذ ایزومتریک و کاغذ دیمتریک نام برد. این کاغذها در شکل (۱-۶) آورده شده‌اند.



(a) **(b)**

(c) **(d)**

شکل (۱-۶)

انواع کاغذ a-ایزومتریک b-دیمتریک c-قطبی d-احتمالات

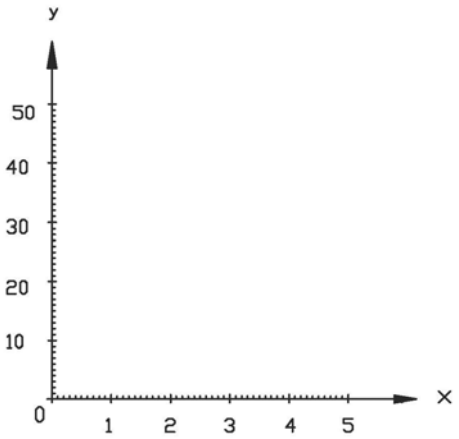
مقیاس

در حل مسائل ترسیمی بسیار پیش می‌آید که از مقیاس‌های مختلفی استفاده کنیم؛ زیرا برای ترسیم یک موضوع باید اندازه‌های تصویری آن را متناسب با ابعاد کاغذمان در نظر بگیریم؛ بنابراین اگر موضوع یا جسمی که باید نقشه‌اش ترسیم شود، دارای اندازه‌ای بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از کاغذ باشد، بایستی آن را با نسبتی معین کوچک‌تر یا بزرگ‌تر کرد.

تعریف مقیاس: مقیاس عبارت است از نسبت اندازه تصویر به اندازه حقیقی که آن را اختصاراً با SC نشان می‌دهند.

$$\text{یامقیاس } SC = \frac{\text{اندازه تصویر}}{\text{اندازه حقیقی}}$$

باید توجه داشت که هر محور می‌تواند دارای مقیاس جداگانه‌ای باشد؛ مثلاً در یک محور هر یک میلی‌متر، یک واحد در نظر گرفته می‌شود و براساس یک میلی‌متر مدرج می‌گردد و در محور دیگر هر ۱۰ میلی‌متر یک واحد در نظر گرفته شده و بر این اساس مدرج می‌شود(شکل ۱-۷).



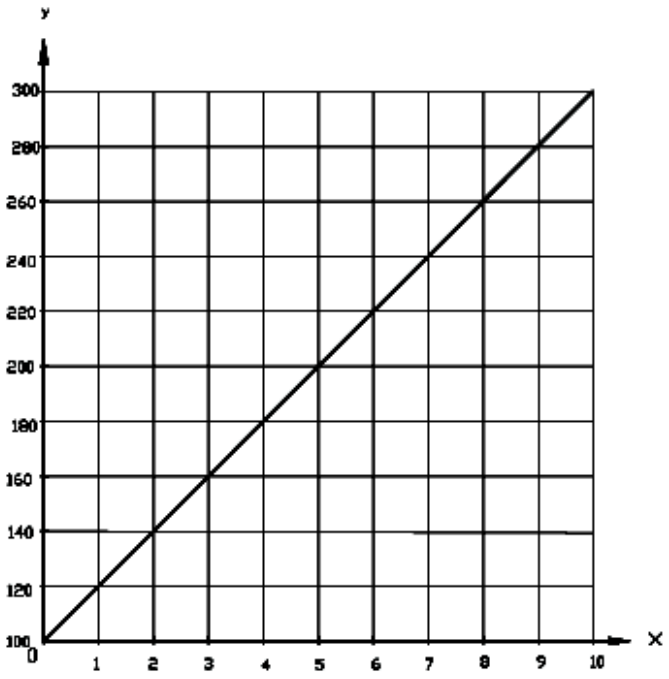
شکل (۱-۷) متفاوت بودن مقیاس روی هر دو محور

در مواردی که متغیر نسبت به تابع در محدوده بزرگتری قرار گرفته باشد و یا

بالعکس، می‌توان هر محـور را از یـک عـدد متناسـب بـا مسـأله انتخـاب نمـود و درجـه‌بنـدی را شروع کرد.

مثلاً بـرای رسـم تـابعی ماننـد $y = ۲۰x + ۱۰۰$ مـی‌تـوان مـدرج کـردن محـور y را از عـدد ۱۰۰ آغاز کرد.

x	*1*	*2*	*3*	*4*
y	*120*	*140*	*160*	*180*



شکل (۱-۸) نمایش تابع y=20x+100

محاسبات

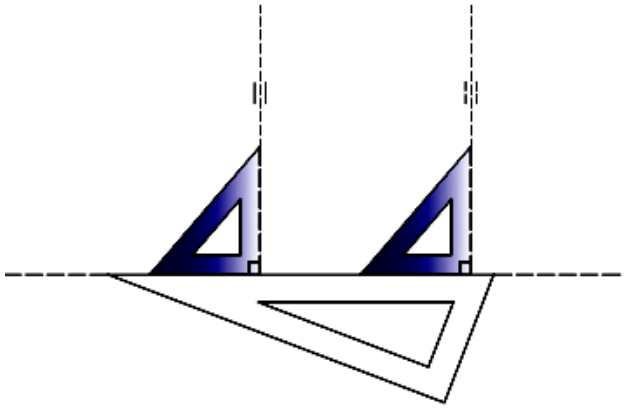
در این بخش به انجام محاسبات به روش ترسیمی می پردازیم. همان‌طور که اشاره شد، گرچه دقت محاسبات در ریاضیات ترسیمی با دقت اندازه‌گیری متناسب است و در هر صورت دقت این نوع محاسبه از دقت حل به روش تحلیلی کمتر می باشد؛ ولیکن در بسیاری از موارد، دقت به‌دست آمده از این روش برای ما کافی است.

محاسبات این مبحث محاسباتی، مقدماتی می‌باشد که برای آشنایی با اصول روش ترسیمی مطرح گردیده است و ممکن است به خوبی نتواند نشان دهنده سهولت انجام محاسبات با این روش نسبت به روش تحلیلی باشد و تصور شود این روش نسبت به روش تحلیلی زمان بیشتری می‌گیرد؛ در صورتی که در محاسبات پیشرفته‌تر و با حل مسائل استاتیکی و دینامیکی مزیت روش ترسیمی به روشنی قابل مشاهده است.

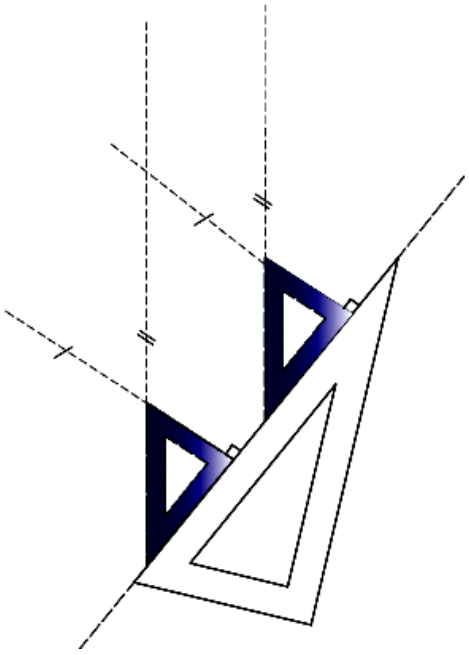
جهت ترسیم هر چه دقیق‌تر مسائل، لازم است وسیله‌ها بسیار دقیق باشند. هر چه از مداد نوک تیزتری استفاده کنیم، خطوط ترسیم شده نازک‌تر و دقت جواب‌ها بیشتر می‌شود.

در ترسیم، گاهی از رسم خطوط موازی و عمود بر هم استفاده می‌شود؛ لذا باید کشیدن خطوط عمود و موازی را آموخته باشیم.

شکل (۱-۹) حالت‌های مختلف کشیدن خطوط موازی را به وسیله دو گونیا یادآوری می کند. همان‌طور که مشاهده می شود، یک گونیا در حالت موردنظر ثابت نگه داشته می‌شود و با حرکت گونیای دیگر خطوط عمود یا موازی ایجاد می‌گردد.



(a)

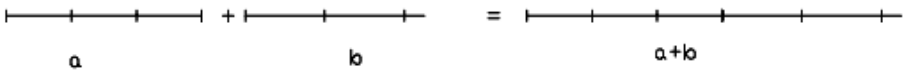


(b)

شکل (۱-۹) a و b حالت‌های مختلف کشیدن خطوط موازی با دو گونیا

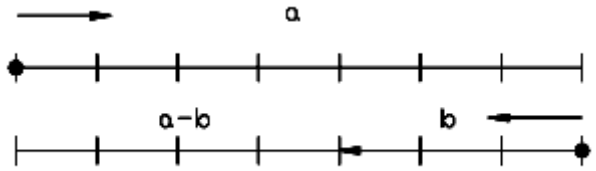
چهار عمل اصلی به روش ترسیمی

۱-جمع: می‌دانیم که در ریاضیات ترسیمی عدد را به صورت یک پاره خط نشان می‌دهند. برای جمع دو عدد کافیست اعداد را با مقیاس‌های مناسب و صحیح به صورت پاره خط‌های پشت سر هم نمایش بدهیم و حاصل را به‌دست آوریم (شکل۱-۱۰).



شکل(۱-۱۰)جمع دو عدد جبری

۲- تفریق: برای انجام عمل تفریق کافیست پاره خط‌های نشان دهنده اعداد را از هم کم کنیم؛ بدین صورت که پاره خط دوم را از انتهای پاره خط اول و در جهت مخالف رسم می‌کنیم (شکل۱-۱۱).



شکل (۱-۱۱) تفریق دو عدد جبری

۳- ضرب: هدف به‌دست آوردن $a \times b = c$ است.

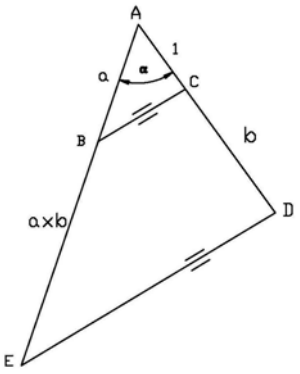
روش اول:

- از نقطه A خط AB را به اندازه a رسم می‌کنیم.
- با یک زاویه دلخواه، AC را به اندازه واحد انتخاب می‌کنیم و در همان امتداد CD را به اندازه b جدا می‌کنیم.
- از نقطه C به B وصل کرده و خط DE را به موازات CB رسم می‌کنیم.

پاره‌خط BE جواب موردنظر می‌باشد.

❋اثبات: با توجه به شکل ۱-۱۲ داریم:

بنابر قضیه تالس $\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CD}$



$$\frac{a}{BE}=\frac{1}{b}$$
$$\Rightarrow BE=a\times b$$

شکل (۱-۱۲) ضرب دو عدد جبری

مثال: حاصل‌ضرب دو عدد 5×6 را با ترسیم نشان دهید.