بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

معادلات دیفرانسیل

تألیف:

ریچارد برونسون

ترجمه:

دکتر مهرداد نوری خاجوی

دکتر فرامرز آشنای قاسمی

اعضای هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

سر شناسنامه	:	برانسن، ریچارد Bronson, Richard
عنوان و نام پدید آور	:	معادلات دیفرانسیل/ تألیف ریچارد برونسون؛ ترجمه مهرداد نوری خاجوی، فرامرز آشنای قاسمی
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
مشخصات ظاهری	:	۵۱۲ ص.
شابک	:	978-600-6594-35-4
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	عنوان اصلی: Schaum's outine of modern introductory differential equations, with Laplace transforms, numerical methods, matrix methods [and] eigenvalue problems, [c1973].
یادداشت	:	واژه‌نامه.
موضوع	:	معادله‌های دیفرانسیل
شناسه افزوده	:	نوری خواجوی، مهرداد، ۱۳۴۰-، مترجم
شناسه افزوده	:	آشنای قاسمی، فرامرز، ۱۳۴۷-، مترجم
شناسه افزوده	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
رده بندی کنگره	:	QA ۳۷۲/ب۴م۶ ۱۳۹۳
رده بندی دیویی	:	۵۱۵/۳۵
شماره کتابشناسی ملی	:	۳۶۴۰۲۳۱

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

عنوان	:	معادلات دیفرانسیل
ترجمه	:	دکتر مهرداد نوری خاجوی و دکتر فرامرز آشنای قاسمی، اعضای هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
ویراستار علمی و ادبی	:	دکتر فرامرز آشنای قاسمی
نوبت چاپ	:	اول- پاییز ۱۳۹۳
انتشارات	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
لیتوگرافی	:	فرانقش
چاپ	:	مقدم
طراح جلد	:	شهرام طهماسبی
ناظر چاپ	:	محمد معتمدی نژاد
کارشناس	:	نیره فیروزی
شمارگان	:	۱۰۰۰ جلد
قیمت	:	۱۶,۰۰۰ تومان
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۶۵۹۴-۳۵-۷۴ ISBN: 978-600-6594-35-4

کلیهٔ حقوق این اثر برای مؤلفین و مترجمین و دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجائی محفوظ است.

نشانی: تهران، لویزان – کد پستی ۱۶۷۸۸-۱۵۸۱۱ – صندوق پستی ۱۶۳ – ۱۶۷۸۵ – تلفن: (۲۶۳۲) ۹ – ۲۲۹۷۰۰۶۰، ۲۲۹۷۰۰۷۰، نمابر: ۲۲۹۷۰۰۰۳، پست الکترونیکی: Publish@srttu.edu، وب سایت: http://Publish.srttu.edu

فهرست مطالب

مقدمهٔ نویسنده

در طی بیست سال گذشته پیشرفتهای زیادی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل صورت گرفته است. ظهور کامپیوترهای با سرعت زیاد روشهای حل عددی را ممکن ساخته، باعث بوجود آمدن گروهی از روشهای جدید شده است. شیوهٔ سیستماتیکی که امروزه در حل مسائل مهندسی محبوبیت زیادی پیدا کرده، قابل اجراء توسط روشهای ماتریسی و تبدیل لاپلاس می‌باشد.

این کتاب توسط مسائل حل‌شدهٔ زیاد، تئوری کلاسیک معادلات دیفرانسیل، نیز روشهای جدیدتر را مورد بررسی قرار می‌دهد. پیش‌نیاز بسیاری از فصول تنها حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد. این کتاب به عنوان کتاب استاندارد درس معادلات دیفرانسیل، و یا کتاب کمک‌درسی برای دورهٔ کارشناسی، و یا مطالعهٔ مستقل مناسب می‌باشد.

فصول ۱ تا ۲۱ و ۳۷ تا ۳۹ مطالب کلاسیک، شامل معادلات جدایی‌پذیر و کامل، حل معادلات خطی با ضرایب ثابت توسط معادلهٔ مشخصه، روش تغییر پارامترها و روش ضرایب نامعین، حل سری‌ها و مسائل مقدار مرزی و اشترم لیوویل را مورد بررسی قرار می‌دهد. فصول ۲۲ تا ۳۶ روشهای جدیدتر، مانند تبدیل لاپلاس، روشهای ماتریسی و روشهای عددی را بررسی می‌کند. روشهای عددی به خاطر اهمیت کاربردی‌شان بیشتر مورد تأکید قرار گرفته‌اند.

هر فصل کتاب به سه بخش تقسیم شده است. بخش اول شامل نکات مهم فصل می‌باشد. بخش دوم شامل مسائل حل‌شده است که مطالب بخش اول را تشریح می‌کند، و دربعضی موارد مطالب بخش اول را تعمیم می‌دهد. بخش آخر شامل یک‌سری مسئله با پاسخ نهایی آنها می‌باشد که دانشجو می‌تواند میزان یادگیری مطالب فصل را با حل این مسائل مورد ارزیابی قرار دهد.

مقدمهٔ مترجمان

برای درک و پیش‌بینی رفتار پدیده‌های طبیعی، نیاز به ساختن مدلهای ریاضی از این پدیده‌ها وجود دارد. مسلماً این مدلها، بر اساس یک‌سری قوانین فیزیکی؛ از قبیل اصل بقای ماده، اصل بقای انرژی، اصل بقای اندازه حرکت، قانون دوم ترمودینامیک، قانون کِرشهُف و ... می‌باشد. لفظ «پدیده»، معنای تغییر نسبت به زمان را در خود دارد، که این تغییرات در مدلهای ریاضی، به صورت مشتقات کمیّت مورد نظر نسبت به زمان جلوه می‌کند. بنابراین مدل ریاضیِ یک پدیده، شامل معادله یا معادلاتی است که در آنها مشتقاتِ کمیّت مورد نظر نسبت به زمان وجود دارد. چنین معادله‌ای، «معادلهٔ دیفرانسیل» نامیده می‌شود. از این رو یک فیزیکدان و یا یک مهندس، برای تشریح پدیده‌ها، می‌بایست که معادلات مختلف دیفرانسیل را شناخته، از آنها به عنوان ابزاری برای حل مسائل استفاده کند.

کتابی که در دست دارید، نوشتهٔ «ریچارد برونسون»، ریاضی‌دان شهیر آمریکایی است. کتاب به صورت اصولی و سیستماتیک، برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی، در کلیهٔ رشته‌های فنی مهندسِی و علوم پایه، نیز برخی رشته‌های علوم تجربی، نوشته شده است. اگرچه برخی از فصلهای پایانی کتاب، مباحث پیشرفته‌تر را که عموماً در دوره‌های کارشناسی ارشد مورد بحث قرار می‌گیرند، مطرح می‌کند. *کتاب حالتی خودآموز داشته، استفاده از آن نیاز به استاد ندارد.* هر فصل با تعاریف دقیق از مفاهیم اساسی، اثبات قضایا، و به دست آوردن روابط اصلی شروع شده، سپس برای درک بهتر مطالب، تعداد زیادی مسئله به طور کامل حل شده است. اما به سبب اینکه قدرت و توانایی در حل مسائل، تنها با مطالعهٔ مسائل حل‌شده به دست نیامده، نیازمند حل آن توسط خودِ فرد می‌باشد، تعداد زیادی مسئلهٔ بدون حل نیز تنها با پاسخ انتهایی‌شان، در انتهای هر فصل ارائه شده است. از دانشجویان عزیز، مصراً درخواست می‌شود که پس از مطالعهٔ متن درس و مسائل حل‌شده، مسائل فاقد پاسخِ کاملِ انتهای فصلها را نیز حل کنند. توانایی دانشجو در حل این مسائل، نشان‌دهندهٔ درک صحیح

مطالب بوده، به واقع جواز عبور دانشجو به فصل بعدی می‌باشد. در صورتی که دانشجو قادر به حل مسائل آخر فصل نباشد، از او تقاضا می‌شود فصل مزبور، و مسائل حل‌شدهٔ آن را یک بار دیگر، ولی با دقت بیشتر، خوانده؛ این عمل را تا زمانی که قادر به حل مسائل انتهایی آن فصل شود، تکرار کند.

از آنجایی که هیچ اثری بدون لغزش و خطا نمی‌باشد، از دانشجویان عزیز و استادان گرانقدر، درخواست می‌شود که هر نظری در ارتباط با بالا بردن کیفیت این کتاب به نظرشان می‌رسد، با اینجانبان در میان گذاشته، قرین منت‌مان گردانند. *ظریفی گفت: من و مادرم باهم، بهترین منجمان دنیا هستیم، زیرا هیچگاه پیشگویی خطایی از ما سر نمی‌زند. به او گفتند: این ادعای بزرگی است. از کجا چنین ادعایی کنی؟ وی پاسخ داد: از آنجا که هرگاه ابری در آسمان پیدا شود، من گویم باران خواهد آمد، و مادرم گوید نخواهد آمد؛ که مسلماً یا آن شود که من گویم، یا آن شود که او گوید!* ما مترجمان این کتاب نیز باهم، بهترین مترجمان دنیا هستیم، زیرا هیچگاه در ترجمهٔ متون مختلف، خطایی از ما سر نمی‌زند! حالا چطور است که وقتی کتابهای‌مان چاپ می‌شوند، در آنها غلط‌هایی به چشم می‌خورد به چه فراوانی؛ قطعاً یا تقصیر حروفچینان محترم کتابهای‌مان است [1]، و یا به این خاطر است که تنها نظر یکی از ما دو نفر (به سبب جلوگیری از ایجاد تضاد در مطالب کتاب) در کتاب درج شده است؛ والاّ حرف حساب همان است که چند خط پیشتر به آن اشاره گردید. درهر حال، چه بخواهید و چه نخواهید، از هم‌اکنون بی‌صبرانه در انتظار دریافت نظرها و پیشنهادهای

---

[1] امید است که این قسمت مهم مقدمه، توسط حروفچین گرامی‌تر از جانِ این کتاب، محکوم به حذفِ مصلحت‌اندیشانه نگردیده، «سهواً» جا نیفتد!

[بیچاره حروفچین‌ها!! که هرچه کاسه است سر آنها می‌شکنند، مگر نه این است که هر کتاب بعد از حروفچینی باید توسط مؤلف یا مصحح خوانده شود و غلطهای آن را پیدا کنند و علامت بزنند تا تصحیح شود؛ که متأسفانه بسیاری از مصححین (ویراستاران) بجای پیدا کردن غلطهای تایپی، دنبال پشتک و وارو زدن روی متن تایپی می‌روند و بجای پیدا کردن غلطها، شروع می‌کنند به خط‌خطی کردن متن و غلطهایی می‌گیرند که البته بسیاری از آنها بی‌موردند و روی متن دستنویس هم می‌توانستند همان کار را بکنند؛ در نتیجه یادشان می‌رود که دارند غلط‌گیری می‌کنند و ... خوب، معلوم است دیگر، همان پیش می‌آید که گفته شد. نمونه‌اش هم در همین کتاب فراوان است. ای‌کاش خوانندگان به نمونهٔ اولیه این کتاب دسترسی داشتند تا خود قضاوت می‌کردند. در هر حال، هرچقدر هم که غلط گرفته باشند و حروفچین «سهواً» تصحیح نکرده باشد باز مسئولیت به گردن خودِ مصححین است که غلطهایی را که خود گرفته‌اند، کنترل کنند که حتماً تصحیح شده باشند (حتی اگر لازم باشد عمل «تصحیح و کنترل» *باید* بارها صورت گیرد) نه اینکه شانه از زیر بار مسئولیت خالی کنند و بگویند حروفچین تصحیح نکرده است! ـ حروفچین همین کتاب]

شما سروران گرامی‌مان هستیم،تا انشاءا... اگر این کتاب به چاپ دوم برسد، آنها را به کار بندیم. آری، بی‌صبرانه در انتظار دریافت نظرها و پیشنهادهای «شما» سروران گرامی هستیم زیرا، ما نیز همچون «پروتو گوراس»، فیلسوف شهیر یونان باستان، براین باوریم که: *«این انسان است که مقیاس همهٔ چیزهاست. مقیاس هستیِ چیزهایی که هست، و مقیاس نیستیِ چیزهایی که نیست!»*

دکتر مهرداد نوری خاجوی

دکتر فرامرز آشنای قاسمی

تهران - پاییز ۹۳

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

یک *معادلهٔ دیفرانسیل* شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن می‌باشد.

مثال ۱.۱ ـ معادلات دیفرانسیل زیر شامل تابع مجهول y می‌باشند.

$$\frac{dy}{dx} = ۵x + ۳ \tag{۱.۱}$$

$$e^y \frac{d^۲ y}{dx^۲} + ۲\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ = ۱ \tag{۱.۲}$$

$$۴\frac{d^۳ y}{dx^۳} + (\sin x)\frac{d^۲ y}{dx^۲} + ۵xy = ۰ \tag{۱.۳}$$

$$\left(\frac{d^۲ y}{dx^۲}\right)^۳ + ۳y\left(\frac{dy}{dx}\right)^۷ + y^۳\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ = ۵x \tag{۱.۴}$$

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} - ۴\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = ۰ \tag{۱.۵}$$

اگر در معادلهٔ دیفرانسیلی، *تابع مجهول* تنها به یک متغیر *مستقل* وابسته باشد، آن را یک *معادلهٔ دیفرانسیل معمولی* می‌نامیم. و اگر تابع مجهول به دو یا بیش از دو متغیر مستقل

وابسته باشد آن را یک *معادلهٔ دیفرانسیل جزیی* می‌نامیم.

مثال ۱.۲ ـ معادلات (۱.۱) تا (۱.۴) مثالهایی از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند، چون تابع مجهول y تنها به متغیر x وابسته می‌باشد. معادلهٔ (۱.۵) یک معادلهٔ دیفرانسیل جزیی می‌باشد، چون y به دو متغیر مستقل t و x وابسته می‌باشد.

البته ما در این کتاب با معادلات دیفرانسیل معمولی سر و کار داریم.

۱.۲ مرتبه و درجه

مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل، مرتبهٔ بالاترین مشتق ظاهرشده در معادله می‌باشد.

مثال ۱.۳ ـ معادلهٔ (۱.۱) یک معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ اول و معادلات (۱.۲)، (۱.۴) و (۱.۵) معادلات دیفرانسیلی از مرتبهٔ دوم می‌باشند. (توجه داشته باشید که بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در معادلهٔ (۱.۴) دو می‌باشد.) و بالاخره معادلهٔ (۱.۳) یک معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ سوم است.

اگر تابع مجهول و مشتقات موجود در معادلهٔ دیفرانسیل را بتوانیم بصورت یک چندجمله‌ای بنویسیم، آنگاه توان بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در معادله را درجهٔ چندجمله‌ای می‌نامیم.

مثال۱.۴ ـ معادلهٔ (۱.۴) یک معادلهٔ دیفرانسیل از درجهٔ سوم می‌باشد چون جملهٔ مرتبهٔ دوم آن به‌توان سه رسیده است. معادلات (۱.۱) و (۱.۳) نیز مثالهایی از معادلات دیفرانسیل درجهٔ اول می‌باشند.

البته هر معادلهٔ دیفرانسیلی را نمی‌توان برحسب درجه دسته‌بندی نمود. مثلاً معادلهٔ (۱.۲) دارای درجه نمی‌باشد، چون نمی‌توان تابع مجهول و مشتقاتش را بصورت یک چندجمله‌ای نمایش داد (بخاطر جملهٔ e^y.).

۱.۳ معادلات دیفرانسیل خطی

یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی از مرتبهٔ n خطی است اگر تابع مجهول y و متغیر مستقل x موجود در آن را بتوان به شکل زیر نمایش داد:

$$b_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-۱}(x)\frac{d^{n-۱} y}{dx^{n-۱}} + \cdots + b_۱(x)\frac{dy}{dx} + b_۰(x)y = g(x) \quad (۱.۶)$$

توابع $b_j(x)$ $(j=0,1,2,\cdots,n)$ و $g(x)$ را معلوم و تنها وابسته به متغیر x در نظر می‌گیریم و معادلات دیفرانسیلی را که نتوان بصورت معادلهٔ (۱.۶) نمایش داد، غیرخطی می‌نامیم.

مثال ۱.۵ ـ معادلهٔ (۱.۱) یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول می‌باشد که در آن $b_1(x)=1$، $b_0(x)=0$ و $g(x)=5x+3$ می‌باشد. هم‌چنین معادلهٔ (۱.۳) نیز یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی از مرتبهٔ سوم می‌باشد که در آن $b_3(x)=4$، $b_2(x)=\sin x$، $b_1(x)=0$، $b_0(x)=5x$ و $g(x)=0$ می‌باشد. ولی معادلات (۱.۲) و (۱.۴) غیرخطی می‌باشند.

۱.۴ نمادگذاری

عبارات y'، y''، y'''، $y^{(4)}$، $\cdots$، $y^{(n)}$ اغلب برای نمایش مشتقات اول، دوم، سوم، چهارم، ...، nام y نسبت به یک متغیر مستقل بکار برده می‌شود.مثلاً y'' نمایشگر $\frac{d^2y}{dx^2}$ است، در صورتی که متغیر مستقل مربوطه x باشد و یا نمایشگر $\frac{d^2y}{dp^2}$ است،اگرمتغیرمستقل مورد نظر p باشد. البته وقتی متغیر مستقل مسئله زمان، یعنی t باشد، علائم پریم را می‌توان با نقطه جاگزین نمود. بنابراین $\dot{y}$، $\ddot{y}$ و $\dddot{y}$ به ترتیب نمایشگر $\frac{dy}{dt}$، $\frac{d^2y}{dt^2}$ و $\frac{d^3y}{dt^3}$ می‌باشند.

پرانتز موجود در بالای توان مشتق، مثلاً در $y^{(n)}$، تنها برای این بکار گرفته شده است که عبارت مزبور با عبارت توان nام y، یعنی y^n اشتباه نگردد.

مسائل حل‌شده

در مسائل زیر هریک از معادلات دیفرانسیل داده‌شده را برحسب مرتبه، درجه (در صورت امکان) و خطی بودن دسته‌بندی کنید و سپس تابع مجهول و متغیر مستقل موجود در هریک از آنها را مشخص کنید.

۱.۱ـ $y'''-5xy'=e^x+1$.

مرتبهٔ سوم: چون بالاترین مرتبهٔ مشتق آن سه می‌باشد. *درجهٔ اول:* چون اولاً معادلهٔ مزبور به شکل معادلهٔ گفته‌شده در بخش ۱.۲ بوده و ثانیاً توان مشتق مرتبهٔ سوم

آن یک می‌باشد. *خطی:* چون $b_3(x) = 1$، $b_2(x) = 0$، $b_1(x) = -5x$، $b_0(x) = 0$، $g(x) = e^x + 1$ می‌باشد. تابع مجهول آن y و متغیر مستقل آن x می‌باشد.

۱.۲ـ $t\ddot{y} + t^2\dot{y} - (\sin t)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$.

مرتبهٔ دوم*:* چون بالاترین مرتبهٔ مشتق آن دو می‌باشد. *فاقد درجه:* چون بخاطر وجود جملهٔ $\sqrt{y}$ نمی‌توان آن را بصورت یک چندجمله‌ای برحسب y و مشتقات y نوشت. غیرخطی*:* چون نمی‌توان آن را بصورت معادلهٔ (۱.۶) نمایش داد. تابع مجهول آن y و متغیر مستقل آن t می‌باشد.

۱.۳ـ $s^2\dfrac{d^2t}{ds^2} + st\dfrac{dt}{ds} = s$.

مرتبهٔ دوم. *درجهٔ اول:* معادلهٔ مزبور یک چندجمله‌ای است که شامل تابع نامشخص t و مشتقات آن (با ضرایبی از s) بوده و توان بالاترین مرتبهٔ مشتق آن یک می‌باشد. غیرخطی*:* چون $b_1 = st$ است یعنی b_1 هم به s و هم به t وابسته می‌باشد. تابع مجهول آن t و متغیر مستقل آن s می‌باشد.

۱.۴ـ $5\left(\dfrac{d^4b}{dp^4}\right)^5 + 7\left(\dfrac{db}{dp}\right)^{10} + b^7 - b^5 = p$.

مرتبهٔ چهارم. درجهٔ پنجم*:* چون توان بالاترین مرتبهٔ مشتق آن، پنج می‌باشد. غیرخطی. تابع مجهول آن b و متغیر مستقل آن p می‌باشد.

۱.۵ـ $y\dfrac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$.

مرتبهٔ دوم. درجهٔ اول. *خطی:* چون $b_2(y) = y$، $b_1(y) = 0$، $b_0(y) = 0$ و $g(y) = y^2 + 1$ می‌باشد. تابع مجهول آن x و متغیر مستقل آن y می‌باشد.

مسائل تکمیلی

برای معادلات دیفرانسیل زیر خواسته‌های زیر را تعیین کنید: (الف) مرتبه، (ب) درجه (در صورت وجود)، (پ) خطی بودن، (ت) تابع مجهول، (ث) متغیر مستقل.

۱.۶ ـ $(y'')^{2} - 3yy' + xy = 0$

۱.۷ ـ $x^{4}y^{(4)} + xy''' = e^{x}$

۱.۸ ـ $t^{2}\ddot{s} - t\dot{s} = 1 - \sin t$

۱.۹ ـ $y^{(4)} + xy''' + x^{2}y'' - xy' + \sin y = 0$

۱.۱۰ ـ $\dfrac{d^{n}x}{dy^{n}} = y^{2} + 1$

۱.۱۱ ـ $\left(\dfrac{d^{2}r}{dy^{2}}\right)^{2} + \dfrac{d^{2}r}{dy^{2}} + y\dfrac{dr}{dy} = 0$

۱.۱۲ ـ $\left(\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right)^{\frac{3}{2}} + y = x$

۱.۱۳ ـ $\dfrac{d^{7}b}{dp^{7}} = 3p$

۱.۱۴ ـ $\left(\dfrac{db}{dp}\right)^{7} = 3p$

پاسخ مسائل تکمیلی

۱.۶ ـ	(الف) ۲	(ب) ۲	(پ) غیرخطی	(ت) y	(ث) x
۱.۷ ـ	(الف) ۴	(ب) ۱	(پ) خطی	(ت) y	(ث) x
۱.۸ ـ	(الف) ۲	(ب) ۱	(پ) خطی	(ت) s	(ث) t
۱.۹ ـ	(الف) ۴	(ب) هیچ	(پ) غیرخطی	(ت) y	(ث) x
۱.۱۰ ـ	(الف) n	(ب) ۱	(پ) خطی	(ت) x	(ث) y
۱.۱۱ ـ	(الف) ۲	(ب) ۲	(پ) غیرخطی	(ت) r	(ث) y
۱.۱۲ ـ	(الف) ۲	(ب) هیچ	(پ) غیرخطی	(ت) y	(ث) x
۱.۱۳ ـ	(الف) ۷	(ب) ۱	(پ) خطی	(ت) b	(ث) p
۱.۱۴ ـ	(الف) ۱	(ب) ۷	(پ) غیرخطی	(ت) b	(ث) p

فصل ۲

جواب‌ها

۲.۱ تعریف جواب

جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل با تابع مجهول y و متغیر مستقل x و در محدودهٔ I، تابعی بصورت $y(x)$ می‌باشد که به ازای کلیهٔ مقادیر x موجود در I، در معادلهٔ دیفرانسیل مزبور صدق کند.

مثال ۲.۱ ـ آیا $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ که در آن c_1 و c_2 ثوابتی دلخواه می‌باشند، جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4y = 0$ محسوب می‌شود؟

با مشتق‌گیری از y داریم:

$$y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x \qquad y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) \\ &= (-4c_1 + 4c_1) \sin 2x + (-4c_2 + 4c_2) \cos 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

چون $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ به ازای جمیع مقادیر x موجود در محدودهٔ $(-\infty, \infty)$ در معادلهٔ دیفرانسیل مزبور صدق می‌کند، یک جواب برای آن محسوب می‌شود.

مثال ۲.۲ ـ آیا $y = x^2 - 1$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $(y')^4 + y^2 = -1$ می‌باشد؟

سمت چپ معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده بخاطر وجود توانهای دو و چهار، به ازای هر تابع حقیقی که بصورت $y(x)$ باشد و به ازای هر x دلخواه، مقداری مثبت شده، در صورتی که سمت راست آن یک مقدار منفی است. لذا هیچ تابعی بشکل $g(x)$ وجود نداردکه در معادلهٔ دیفرانسیل مزبور صدق کند و در نتیجه، این معادلهٔ دیفرانسیل فاقد جواب می‌باشد.

همانگونه که مشاهده کردید یک معادلهٔ دیفرانسیل می‌تواند دارای تعداد نامحدودی جواب (مانند مثال ۲.۱) و یا اصلاً فاقد جواب (مانند مثال ۲.۲) باشد. البته یک معادلهٔ دیفرانسیل هم‌چنین می‌تواند تنها دارای یک جواب باشد. مثلاً معادلهٔ دیفرانسیل $(y')^۴ + y^۲ = ۰$ به دلایل ارائه‌شده در مثال ۲.۲ تنها دارای یک جواب و برابر $y \equiv ۰$ می‌باشد.

۲.۲ جوابهای عمومی و خصوصی

جواب خصوصی یک معادلهٔ دیفرانسیل تنها یک جواب بوده، در صورتی که *جواب عمومی* یک معادلهٔ دیفرانسیل یک مجموعه از جوابها می‌باشد.

مثال ۲.۳ ـجواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل ارائه‌شده در مثال ۲.۱ را می‌توان بصورت $y = c_۱ \sin ۲x + c_۲ \cos ۲x$ نشان داد (به فصول ۱۱ و ۱۲ مراجعه کنید). یعنی هریک از جوابهای خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مزبور دارای چنین شکل عمومی می‌باشد. برخی از جوابهای خصوصی آن عبارتند از: (الف) $y = ۵\sin ۲x - ۳\cos ۲x$ (با انتخاب $c_۱ = ۵$ و $c_۲ = -۳$)، (ب) $y = \sin ۲x$ (با انتخاب $c_۱ = ۱$ و $c_۲ = ۰$)، (پ) $y \equiv ۰$ (با انتخاب $c_۱ = c_۲ = ۰$).

جواب عمومی یک معادلهٔ دیفرانسیل را همیشه نمی‌توان به کمک یک رابطهٔ تنها نمایش داد. بعنوان مثال می‌توان به معادلهٔ دیفرانسیل $y' + y^۲ = ۰$ که دارای دو جواب خصوصی $y = \frac{۱}{x}$ و $y \equiv ۰$ است اشاره کرد. معادلات دیفرانسیل خطی از این نظر استثناء بوده و جوابهای عمومی‌شان در فصل ۱۱ تشریح می‌گردد.

۲.۳ مسائل بامقدار اولیه و مسائل بامقدار مرزی

یک معادلهٔ دیفرانسیل به همراه شرایط تکمیلی موجود بر روی تابع مجهول و مشتقات آن، که همگی به ازای مقدار مشابهی از متغیر مسئله بیان شده‌اند، یک *مسئلهٔ بامقدار اولیه* و شرایط

تکمیلی آن را *شرایط اولیه* می‌نامیم. اگر شرایط تکمیلی داده‌شده در بیش از یک مقدار از متغیر مستقل مسئله داده شده باشند، چنین مسئله‌ای را *مسئلهٔ بامقدار مرزی* و شرایط آن را *شرایط مرزی* می‌نامیم.

مثال ۲.۴ ـ مسئلهٔ $y'' + ۲y' = e^x$؛ $y(\pi) = ۱$ و $y'(\pi) = ۲$ یک مسئلهٔ با مقدار اولیه می‌باشد چون هر دو شرط تکمیلی موجود، در $x = \pi$ بیان شده‌اند. اما مسئلهٔ $y'' + ۲y' = e^x$؛ $y(\circ) = ۱$ و $y(۱) = ۱$ **یک مسئله با مقدار مرزی می‌باشد چون دو شرط تکمیلی موجود، در دو مقدار مختلف $x = \circ$ و $x = ۱$ بیان‌شده‌اند.**

جواب یک مسئلهٔ با مقدار اولیه یا مسئلهٔ با مقدار مرزی، تابعی بصورت $y(x)$ می‌باشد که در هر دو حالت می‌بایست در معادلهٔ دیفرانسیل (مطابق با تعریف بخش ۲.۱)، و شرایط تکمیلی داده‌شده صدق نماید.

مثال ۲.۵ ـ محاسبه کنید که آیا هریک از توابع (الف) $y_۱ = \sin ۲x$، (ب) $y_۲(x) = x$، (پ) $y_۳(x) = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$ جوابی برای مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ $y'' + ۴y = \circ$؛ $y(\circ) = \circ$، $y'(\circ) = ۱$ می‌باشند یا خیر؟ (الف) چون $y_۱(x)$ شرط اولیهٔ دوم را ارضاء نمی‌کند ($y'_۱(x) = ۲\cos ۲x$؛ $y'_۱(\circ) = ۲\cos \circ = ۲ \neq ۱$) پس جوابی برای مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ داده‌شده نمی‌باشد. (ب) $y_۲(x)$ هر دو شرط اولیه را ارضاء می‌کند ولی چون در معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده صدق نمی‌کند پس آن‌هم جوابی برای مسئلهٔ مورد نظر نمی‌باشد. (پ) اما چون $y_۳(x)$ علاوه بر صدق نمودن در شرایط اولیه، در معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده نیز صدق می‌کند، پس آن را می‌توان به عنوان جوابی برای مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ داده‌شدهٔ مورد نظر در نظر گرفت.

مسائل حل‌شده

۲.۱ ـ محاسبه کنید که آیا $y(x) = ۲e^{-x} + xe^{-x}$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + ۲y' + y = \circ$ می‌باشد یا خیر؟

با مشتق‌گیری از $y(x)$ داریم:

$$y'(x) = -۲e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x}$$

$$y''(x) = e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}$$

با جاگذاری مقادیر فوق در معادلهٔ دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$y'' + ۲y' + y = xe^{-x} + ۲(-e^{-x} - xe^{-x}) + (۲e^{-x} + xe^{-x}) = ۰$$

بنابراین $y(x)$ یک جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده می‌باشد.

۲.۲ ـ آیا $y(x) \equiv ۱$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + ۲y' + y = x$ است؟

از $y(x) \equiv ۱$ نتیجه می‌گردد که $y'(x) \equiv ۰$ و $y''(x) \equiv ۰$. با جاگذاری این مقادیر در معادلهٔ دیفرانسیل مزبور داریم:

$$y'' + ۲y' + y = ۰ + ۲(۰) + ۱ = ۱ \neq x$$

لذا $y(x) \equiv ۱$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده نمی‌باشد.

۲.۳ ـ نشان دهید که $y = \ln x$ در محدودهٔ $\mathcal{I} = (۰, \infty)$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' = ۰$ بوده، ولی در محدودهٔ $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ نمی‌باشد.

در محدودهٔ $(۰, \infty)$ داریم $y' = \frac{۱}{x}$ و $y'' = -\frac{۱}{x^۲}$. با جاگذاری این مقادیر در معادلهٔ دیفرانسیل مزبور داریم:

$$xy'' + y' = x\left(-\frac{۱}{x^۲}\right) + \frac{۱}{x} = ۰$$

بنابراین $y = \ln x$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده در محدودهٔ $(۰, \infty)$ می‌باشد.

اما $y = \ln x$ در محدودهٔ $(-\infty, +\infty)$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده نمی‌باشد، چون لگاریتم اعداد منفی و صفر، تعریف‌نشده می‌باشند.

۲.۴ ـ نشان دهید که $y = \frac{۱}{(x^۲ - ۱)}$ در محدودهٔ $\mathcal{I} = (-۱, ۱)$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y' + ۲xy^۲ = ۵$ بوده، ولی در محدوده‌هایی بزرگتر که $\mathcal{I}$ را نیز دربر داشته باشند نمی‌باشد.

در محدودهٔ $(-۱, ۱)$ مقدار $y = \frac{۱}{(x^۲ - ۱)}$ و مشتق آن یعنی $y' = \frac{-۲x}{(x^۲ - ۱)^۲}$ کاملاً تعریف‌شده می‌باشند. با جاگذاری این مقادیر در معادلهٔ دیفرانسیل مزبور داریم:

$$y' + ۲xy^۲ = \frac{-۲x}{(x^۲ - ۱)^۲} + ۲x\left[\frac{۱}{x^۲ - ۱}\right]^۲ = ۰$$

بنابراین $y = \frac{۱}{(x^۲ - ۱)}$ یک جواب در محدودهٔ $\mathcal{I} = (-۱, ۱)$ می‌باشد.

اما چون $y = \frac{۱}{(x^۲ - ۱)}$ و مشتق آن در $x = \pm ۱$ تعریف نشده‌اند جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده در محدوده‌ای که هریک از این دو نقطه را دربر گیرد نمی‌باشد.

۲.۵ ـ جواب مسئلهٔ بامقدار اولیهٔ $y' + y = ۰$؛ $y(۳) = ۲$ را در صورتی که جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل معلوم و برابر $y(x) = c_۱e^{-x}$ باشد (به فصل ۸ مراجعه کنید.) که در آن $c_۱$ یک ثابت دلخواه است، بدست آورید.

چون $y(x)$ به ازای جمیع مقادیر $c_۱$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل مزبور می‌باشد، می‌بایست آن مقدار از $c_۱$ را بیابیم که در شرط اولیهٔ مسئله صدق کند. با عددگذاری داریم $y(۳) = c_۱e^{-۳}$. از طرفی شرط اولیه می‌گوید که $y(۳) = ۲$، در نتیجه می‌بایست داشته باشیم $c_۱e^{-۳} = ۲$، یعنی $c_۱ = ۲e^۳$. که با جاگذاری مقدار $c_۱$ حاصل در معادلهٔ $y(x)$، جواب مسئلهٔ بامقدار اولیهٔ داده‌شده برابر $y(x) = ۲e^۳e^{-x} = ۲e^{۳-x}$ خواهد شد.

۲.۶ ـ جواب مسئلهٔ بامقدار اولیهٔ $y'' + ۴y = ۰$؛ $y(۰) = ۰$، $y'(۰) = ۱$ را در صورتی که جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل معلوم و بصورت $y(x) = c_۱ \sin ۲x + c_۲ \cos ۲x$ باشد (به فصل ۱۲ مراجعه کنید.)، بدست آورید.

چون $y(x)$ به ازای جمیع مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل مزبور می‌باشد (به مثال ۲.۱ مراجعه کنید.)، می‌بایست آن مقدار از $c_۱$ و $c_۲$ را بیابیم که در شرایط اولیهٔ مسئله صدق کند. با عددگذاری داریم $y(۰) = c_۱ \sin ۰ + c_۲ \cos ۰ = c_۲$. از طرفی شرایط اولیهٔ مسئله می‌گوید که $y(۰) = ۰$، در نتیجه می‌بایست داشته باشیم

$c_2 = 0$. ازطرفی با مشتق‌گیری داریم $y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$، و پس از عددگذاری خواهیم داشت $y'(0) = 2c_1 \cos 0 - 2c_2 \sin 0 = 2c_1$. متشابهاً شرایط اولیهٔ مسئله می‌گوید که $y'(0) = 1$، در نتیجه می‌بایست داشته باشیم $2c_1 = 1$ و یا $c_1 = \frac{1}{2}$. با جاگذاری مقادیر c_1 و c_2 حاصل در معادلهٔ $y(x)$، جواب مسئلهٔ بامقدار اولیهٔ داده‌شده برابر $y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ خواهد شد (به مثال ۲.۵ مراجعه کنید.).

۲.۷ ـ جواب مسئلهٔ بامقدار مرزی $y'' + 4y = 0$؛ $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$، $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ را در صورتی که جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل بصورت $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ باشد، بدست آورید.

ابتدا می‌نویسیم:

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = c_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

برای ارضای شرط $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$ باید داشته باشیم:

$$c_1\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

بعلاوه داریم:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = c_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

برای ارضای شرط $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ باید داشته باشیم:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 = 1 \qquad (2)$$

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$c_1 = -c_2 = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

با جاگذاری این مقادیر در معادلهٔ $y(x)$ خواهیم داشت:

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}(\sin 2x - \cos 2x)$$

که معادلهٔ فوق جوابی برای مسئلهٔ بامقدار مرزی داده‌شده می‌باشد.

۲.۸ ـ جواب مسئلهٔ بامقدار مرزی $y''+۴y=۰$؛ $y(۰)=۱$، $y\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۲$ را در صورتی که جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل بصورت $y(x)=c_۱\sin ۲x+c_۲\cos ۲x$ باشد، بدست آورید.

چون $y(۰)=c_۱\sin ۰+c_۲\cos ۰=c_۲$ می‌باشد، برای ارضای شرط $y(۰)=۱$ می‌بایست $c_۲=۱$ باشد. متشابهاً چون $y\left(\frac{\pi}{۲}\right)=c_۱\sin\pi+c_۲\cos\pi=-c_۲$ می‌باشد، برای ارضای شرط $y\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۲$ می‌بایست $c_۲=-۲$ باشد. اما همان‌گونه که مشاهده می‌گردد $c_۲$ می‌بایست در یک زمان معین هم برابر ۱ و هم برابر -۲ باشد، که چون چنین امری محال است، لذا جوابی برای این مسئله وجود ندارد.

۲.۹ ـ مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ را بگونه‌ای محاسبه کنید که معادلهٔ دیفرانسیل $y(x)=c_۱\sin ۲x+c_۲\cos ۲x+۱$ شرایط $y\left(\frac{\pi}{۸}\right)=۰$ و $y'\left(\frac{\pi}{۸}\right)=\sqrt{۲}$ را ارضاء کند.

ابتدا می‌نویسیم:

$$y\left(\frac{\pi}{۸}\right)=c_۱\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)+c_۲\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right)+۱=c_۱\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\right)+c_۲\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\right)+۱$$

ازطرفی برای ارضای شرط $y\left(\frac{\pi}{۸}\right)=۰$ می‌بایست $c_۱(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲})+c_۲(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲})+۱=۰$ باشد. و یا اینکه می‌توان نوشت:

$$c_۱+c_۲=-\sqrt{۲} \qquad (۱)$$

همچنین $y'(x)=۲c_۱\cos ۲x-۲c_۲\sin ۲x$ بوده پس:

$$\begin{aligned} y'\left(\frac{\pi}{۸}\right) &= ۲c_۱\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right)-۲c_۲\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) \\ &= ۲c_۱\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\right)-۲c_۲\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\right)=\sqrt{۲}c_۱-\sqrt{۲}c_۲ \end{aligned}$$

از طرفی برای ارضای شرط $y'\left(\frac{\pi}{۸}\right)=\sqrt{۲}$ می‌بایست $\sqrt{۲}c_۱-\sqrt{۲}c_۲=\sqrt{۲}$ باشد، و یا اینکه می‌توان نوشت:

$$c_۱-c_۲=۱ \qquad (۲)$$

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲) داریم $c_1 = \frac{-1}{2}(\sqrt{2}-1)$ و $c_2 = \frac{-1}{2}(\sqrt{2}+1)$.

۲.۱۰ ـ مقادیر c_1 و c_2 را بگونه‌ای حساب کنید که $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2\sin x$ شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ را ارضاء کند.

چون $\sin 0 = 0$ پس $y(0) = c_1 + c_2$ می‌باشد. برای ارضای شرط $y(0) = 0$ داریم:

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (1)$$

از $y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2\cos x$ و سپس با عددگذاری داریم $y'(0) = 2c_1 + c_2 + 2$. متشابهاً برای ارضای شرط $y'(0) = 1$ می‌بایست داشته باشیم $2c_1 + c_2 + 2 = 1$. و یا اینکه:

$$2c_1 + c_2 = -1 \qquad (2)$$

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲) داریم $c_1 = -1$ و $c_2 = 1$.

مسائل تکمیلی

۲.۱۱ ـ کدامیک ازجوابهای زیر جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - y = 0$ محسوب می‌گردند؟ (الف) e^x، (ب) $\sin x$، (پ) $4e^{-x}$، (ت) 0، (ث) $\frac{1}{2}x^2 + 1$.

۲.۱۲ ـ کدامیک از جوابهای زیر جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 4y' + 4y = e^x$ محسوب می‌گردند؟ (الف) e^x، (ب) e^{2x}، (پ) $e^{2x} + e^x$، (ت) $xe^{2x} + e^x$، (ث) $e^{2x} + xe^x$.

در مسائل ۲.۱۳ تا ۲.۲۲ مقادیر c_1 و c_2 را بگونه‌ای بیابید که $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ شرایط داده‌شده را ارضاء نماید. و سپس بیان کنید که آیا شرایط داده‌شده شرایط اولیه هستند یا شرایط مرزی؟

۲.۱۳ ـ $y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۲$

۲.۱۴ ـ $y(۰) = ۲,\ y'(۰) = ۱$

۲.۱۵ ـ $y\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱,\ y'\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲$

۲.۱۶ ـ $y(۰) = ۱,\ y\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱$

۲.۱۷ ـ $y'(۰) = ۱,\ y'\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱$

۲.۱۸ ـ $y(۰) = ۱,\ y'(\pi) = ۱$

۲.۱۹ ـ $y(۰) = ۱,\ y(\pi) = ۲$

۲.۲۰ ـ $y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۰$

۲.۲۱ ـ $y\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۰,\ y\left(\frac{\pi}{۶}\right) = ۱$

۲.۲۲ ـ $y(۰) = ۰,\ y'\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱$

در مسائل ۲.۲۳ تا ۲.۲۷ مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ را بگونه‌ای بیابید که توابع داده‌شده، شرایط اولیهٔ متناظرشان را ارضاء نمایند.

۲.۲۳ ـ $y(x) = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + ۴\sin x;\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = -۱$

۲.۲۴ ـ $y(x) = c_۱x + c_۲ + x^۲ - ۱;\ y(۱) = ۱,\ y'(۱) = ۲$

۲.۲۵ ـ $y(x) = c_۱e^x + c_۲e^{۲x} + ۳e^{۳x};\ y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۰$

۲.۲۶ ـ $y(x) = c_۱\sin x + c_۲\cos x + ۱;\ y(\pi) = ۰,\ y'(\pi) = ۰$

۲.۲۷ ـ $y(x) = c_۱e^x + c_۲xe^x + x^۲e^x;\ y(۱) = ۱,\ y'(۱) = -۱$

پاسخ مسائل تکمیلی

۲.۱۱ ـ (الف)، (پ)، (ت)

۲.۱۲ ـ (الف)، (پ)، (ت)

۲.۱۳ ـ $c_۱ = ۲$، $c_۲ = ۱$؛ شرایط اولیه

۲.۱۴ ـ $c_۱ = ۱$، $c_۲ = ۲$؛ شرایط اولیه

۲.۱۵ ـ $c_1 = 1$، $c_2 = -2$؛ شرایط اولیه

۲.۱۶ ـ $c_1 = c_2 = 1$؛ شرایط مرزی

۲.۱۷ ـ $c_1 = 1$، $c_2 = -1$؛ شرایط مرزی

۲.۱۸ ـ $c_1 = -1$، $c_2 = 1$؛ شرایط مرزی

۲.۱۹ ـ مقداری وجود ندارد؛ شرایط مرزی

۲.۲۰ ـ $c_1 = c_2 = 0$؛ شرایط اولیه

۲.۲۱ ـ $c_1 = \frac{-2}{\sqrt{3} - 1}$، $c_2 = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$؛ شرایط مرزی

۲.۲۲ ـ مقداری وجود ندارد؛ شرایط مرزی

۲.۲۳ ـ $c_1 = -2$، $c_2 = 3$

۲.۲۴ ـ $c_1 = 0$، $c_2 = 1$

۲.۲۵ ـ $c_1 = 3$، $c_2 = -6$

۲.۲۶ ـ $c_1 = 0$، $c_2 = 1$

۲.۲۷ ـ $c_1 = 1 + \frac{3}{e}$، $c_2 = -2 - \frac{2}{e}$