ارتعاشات سیستم‌های پیوسته

مؤلف و مترجم:

دکتر مجید شاه‌قلی

عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

سرشناسه	:	شاهقلی، مجید، ۱۳۶۱-
عنوان و نام پدیدآور	:	ارتعاشات سیستم‌های پیوسته/ مولف مجید شاه‌قلی ؛ ویراستار ادبی شهرام طهماسبی.
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۹۸.
مشخصات ظاهری	:	ط, ۴۱۶ ص.: مصور، جدول، نمودار.
شابک	:	۰-۰۰-۶۵۸۹-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	واژه‌نامه.
یادداشت	:	کتابنامه: ص. ۳۸۸.
یادداشت	:	نمایه.
موضوع	:	ارتعاش
موضوع	:	Vibration
موضوع	:	دینامیک سازه‌ها
موضوع	:	Structural dynamics
شناسه افزوده	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
شناسه افزوده	:	Shahid Rajaee Teacher Training University
رده بندی کنگره	:	TA۳۵۵/ش۲الف۴ ۸۹۳۱
رده بندی دیویی	:	۱۷۱/۶۲۴
شماره کتابشناسی ملی	:	۵۵۷۰۰۴۶

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

عنوان	:	ارتعاشات سیستم‌های پیوسته
مؤلف و مترجم	:	دکتر مجید شاه‌قلی، عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
ویراستار ادبی	:	شهرام طهماسبی
نوبت چاپ	:	اول- زمستان ۱۳۹۷
انتشارات	:	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
لیتوگرافی	:	رجاء نقشینه
چاپ	:	شریف
طراح جلد	:	علی فصیحی و شهرام طهماسبی
ناظر چاپ	:	محمد معتمدی نژاد
صفحه‌آرا	:	نیره فیروزی و آرش محمدی
کارشناسان	:	طاهره کیاء/ علی رضایی اهوانوئی
شمارگان	:	۱۰۰۰ جلد
قیمت	:	۵۰۰,۰۰۰ ریال
شابک	:	۹۷۸-۶۲۲-۶۵۸۹-۰۰-۰ ISBN: ۹۷۸-۶۲۲-۶۵۸۹-۰۰-۰

کلیهٔ حقوق این اثر برای مؤلفان و مترجمان و دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجائی محفوظ است.

نشانی: تهران، لویزان – کد پستی ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸ – صندوق پستی ۱۶۳ – ۱۶۷۸۵ – تلفن: (۲۶۳۲) ۹ – ۲۲۹۷۰۰۶۰، ۲۲۹۷۰۰۷۰، تلفکس: ۲۲۹۷۰۰۴۲، پست الکترونیکی: Publish@sru.ac.ir، وب سایت: http://Publish.sru.ac.ir

ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می‌نمایم به محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.

مقدمه نویسنده

هر سازه یا اجزاء ماشین در مهندسی مکانیک، عمران، هوا فضا، دریا، پزشکی، خودرو، یا سایر ساختارهای مهندسی، یک سیستم پیوسته می‌باشد. وقتی سیستم پیوسته تحت تأثیر بار نوسانی قرار می‌گیرد، رفتار ارتعاشی از خود نشان می‌دهد. معمولاً ارتعاشات در مهندسی یک دغدغه محسوب می‌شود، چراکه باعث خرابی‌های فاجعه بار در ماشین‌ها و یا سازه‌ها می‌شود. این خرابی‌ها در اثر تنش‌های شدید و دامنه‌های بزرگ (ناشی از رزونانس در سیستم) و یا خستگی مواد در یک دوره زمانی اتفاق می‌افتند. مثال‌های فراوانی از این خرابی‌ها وجود دارد. برای مثال ارتعاشات القاء شده توسط یک پره‌ی نابالانس در هلی‌کوپتر در حالیکه با سرعت بالایی در حال چرخش است می تواند منجر به خرابی پره و ویران شدن هلی‌کوپتر شود. یا ارتعاشات بیش از اندازه پمپ ها، کمپرسورها، توربوماشین‌ها و دیگر ماشین‌آلات صنعتی می توانند مخرب باشند. یک مثال جالب از این فروپاشی‌ها مربوط به پل معلق تاکوما[1] در شهر واشنگتن آمریکا است که در سال ۱۹۴۰در اثر وزش بادهایی با سرعت ۴۲ مایل در ساعت در اثر یک مود رزونانسی پیچشی فروریخت. علاوه بر این، ارتعاشات می تواند به علت دامنه های بزرگ و یا به دلیل ایجاد نویز (به ویژه در فرکانس های بالاتر) باعث مشکلاتی برای کاربران شود. کاربردهای دیگر ارتعاشات سیستم های پیوسته در تشخیص صدا و زمینه های موسیقی و آکوستیک می باشد. ارتعاشات سیستم های پیوسته یک موضوع بسیار جالب است. فهمیدن اینکه از لحاظ تئوری چطور سیستم‌های پیوسته ای نظیر نخ‌ها، میله‌ها، تیرها، ورق‌ها، پوسته‌ها و دیگر اجسام پیوسته ارتعاش می‌کنند، به ویژه اینکه این سیستم‌های پیوسته در چه شکل و فرکانسی بطور آزاد ارتعاش می‌کنند، جالب می‌باشد. همچنین یافتن پاسخ این سیستم‌ها وقتی در معرض نیروها و فشارهای نوسانی هستند (مخصوصاً در کاربردهای عملی) مهم هستند. علاوه بر این، ارتعاش سیستم‌های پیوسته یک موضوع ایده‌آل برای کمک به درک رفتار و معانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسأله مقدار ویژه می‌باشد. در این کتاب سعی شده است تعامل بین ریاضیات و درک فیزیکی مورد توجه قرار گیرد. شایان ذکر است که مدلسازی بسیاری از سیستم‌های ارتعاشی از طریق یک مدل پیوسته انجام می‌شود. برای مثال سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی، برداشت کننده های انرژی و... بیشتر بصورت تیرهای مرتعش مدلسازی می‌شوند. یا برای تحلیل ارتعاشی نانو لوله‌های کربنی، این نانولوله‌ها بصورت یک سیستم پیوسته مدلسازی می‌شوند. حتی در

---

[1] *Tacoma narrow bridge*

بیومکانیک نیز برای مدلسازی استخوان از یک سیستم پیوسته که معمولاً میله یا تیر است استفاده می‌شود. بنابراین مشاهده می‌شود که آشنایی با مفاهیم سیستم‌های پیوسته برای بررسی و تحلیل بسیاری از سیستم‌های واقعی ضروری می‌باشد.

کتاب حاضر شامل روش‌های تحلیلی بررسی ارتعاشات سیستم‌های پیوسته‌ای نظیر نخ، کابل، میله، تیر، غشاء و ورق می‌باشد. هدف اصلی این کتاب تحلیل و بررسی جامع ارتعاشات سیستم‌های پیوسته به همراه روش‌های تحلیلی و تقریبی و همچنین ارائه مفاهیم اساسی با مثال‌های مختلف می‌باشد. در این کتاب، ابتدا معادلات خطی ارتعاشات سیستم‌های پیوسته-ای نظیر نخ، کابل، میله، تیر، غشاء و ورق استخراج و در ادامه حل آن‌ها بدست آورده می‌شوند. استخراج معادلات حرکت به کمک قانون دوم نیوتن و اصل توسعه یافته هامیلتون انجام می‌گیرد. در نهایت پاسخ‌های ارتعاشات اجباری و آزاد هریک از سیستم‌های پیوسته یاد شده محاسبه و مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای تحلیل این نوع سیستم‌ها معادله مقدار ویژه برای هر مسأله محاسبه شده و سپس شرط تعامد، مثبت معین بودن و خودالحاقی برای این نوع سیستم‌های پیوسته بررسی می‌گردند. پاسخ‌های ارتعاشات اجباری سیستم‌های پیوسته با شرایط مرزی متفاوت و تحت تأثیر نیروهای گسترده و نقطه‌ای نیز در ادامه مورد مطالعه قرار می‌گیرند. همچنین تعیین پاسخ‌های سیستم‌های پیوسته با استفاده از روش‌های تقریبی نظیر گالرکین، ریلی، ریلی-ریتز و... نیز مورد مطالعه قرار گرفته می‌شوند. در ادامه فصل بندی کتاب شرح داده شده است.

درفصل اول این کتاب سیستم‌های پیوسته و روش هامیلتون توسعه یافته برای بدست آوردن معادلات حرکت معرفی می‌گردند. فصل دوم به بررسی معادلات حرکت سیستم‌های پیوسته-ی نخ، کابل و میله تحت ارتعاش طولی و پیچشی اختصاص یافته است. در فصل سوم نحوه بدست آوردن معادلات حرکت مربوط به ارتعاشات تیرها با تئوری‌های متفاوت آورده شده است. فصل چهارم به بررسی مسأله مقدار ویژه برای سیستم‌های پیوسته اختصاص دارد. مفاهیمی نظیر مثبت معین بودن یک سیستم ارتعاشی، خودالحاقی و تعامد در این فصل بررسی می‌گردند. نحوه استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای هر سیستم پیوسته نیز در این فصل مطالعه می‌شوند. همچنین نحوه بدست آوردن معادلات حرکت و تحلیل ارتعاشی سیستم‌های کوپل شده نیز در این فصل بررسی شده است. علاوه بر این به بررسی حالتی که سیستم پیوسته تقارن فیزیکی دارد پرداخته می‌شود. در ادامه نحوه بدست آوردن پاسخ سیستم به شرایط اولیه (ارتعاشات آزاد) و ورودی های مختلف (پاسخ اجباری) بررسی خواهند شد.

فصل پنجم در ارتباط با ارتعاشات غشاءها می‌باشد. در این فصل معادله حرکت برای غشاءهای مستطیلی و دایروی با استفاده از قانون دوم نیوتن و اصل هامیلتون توسعه یافته استخراج می‌شود. سپس مفاهیم خودالحاقی و مثبت معین بودن برای این سیستم بررسی می‌گردد. پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری این سیستم پیوسته نیز در این فصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در فصل ششم ارتعاشات ورق‌ها بررسی می‌شود. در ابتدای این فصل معادلات حرکت ورق‌ها استخراج می‌شوند. سپس مفاهیمی مانند تعامد، مثبت معین بودن و خوالحاقی برای این سیستم بررسی می‌شود. پاسخ سیستم به شرایط اولیه و ورودی‌های مختلف نیز در ادامه بدست آورده خواهند شد. در فصل هفتم روش‌های تقریبی بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی، شکل مودهای سیستم‌های پیوسته و همچنین پاسخ سیستم در حالت تقریبی مطالعه می‌شود.

نویسنده معتقد است که کتاب حاضر می تواند به عنوان منبعی جهت آموزش درس ارتعاشات سیستم‌های پیوسته در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری مورد استفاده قرار گیرد. اگر چه اثر حاضر به عنوان یک کتاب درسی مورد استفاده قرار می‌گیرد، با این وجود برای مطالعه مستقل نیز کتاب مناسبی است. همچنین این کتاب می تواند برای مهندسین و کارشناسانی که در زمینه‌ی دینامیک و ارتعاشات سازه‌ها فعالیت دارند، مفید واقع شود. دانشجویان (و یا خوانندگان) باید حداقل یک درک اولیه از معادلات دیفرانسیل معمولی و برخی از مباحث موجود در ارتعاشات سیستم‌های گسسته داشته باشند. در غیر این صورت، پیشنهاد می‌شود که خواننده این مباحث را از کتاب‌های مربوطه مطالعه نماید.

از خوانندگان تقاضا دارم نظرات و انتقادات سازنده خویش را به آدرس ایمیل اینجانب ارسال نمایند:
Majid.Shahgholi@Gmail.com

در پایان از آقای مهندس آرش محمدی به خاطر ویرایش کتاب و ترسیم شکل‌ها تشکر می‌نمایم.

مجید شاه قلی زمستان ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فصل ۱: معرفی سیستم‌های پیوسته ۱

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- یک سیستم پیوسته چیست؟ ۲

۱-۳- سیستم‌های پیوسته مرسوم در مهندسی ۳

۱-۴- دسته بندی انواع ارتعاشات سیستم‌های پیوسته ۴

۱-۵- مثال‌هائی از سیستم‌های پیوسته ۵

۱-۶- گسسته سازی سیستم‌های پیوسته ۶

۱-۷- نحوه‌ی استخراج معادلات حرکت یک سیستم پیوسته ۷

۱-۷-۱- اصل هامیلتون توسعه‌یافته ۷

تمرین‌ها ۱۰

فصل ۲: ارتعاشات عرضی نخ‌ها، ارتعاشات طولی و پیچشی میله‌ها ۱۳

۲-۱- مقدمه ۱۴

۲-۲- ارتعاشات عرضی نخ‌ها ۱۵

۲-۲-۱- استخراج معادلات حرکت نخ با استفاده از قانون دوم نیوتن ۱۵

۲-۲-۲- استخراج معادلات حرکت نخ با استفاده از اصل هامیلتون ۱۶

۲-۲-۳- معرفی برخی شرایط مرزی برای نخ‌های تحت ارتعاش عرضی ۱۸

۲-۲-۴- شرایط مرزی ترکیبی برای نخ مرتعش ۲۰

۲-۲-۵- محاسبه شرایط مرزی ترکیبی با استفاده از قانون دوم نیوتن ۲۳

۳-۲- ارتعاشات محوری میله‌ها ۲۶
۱-۳-۲- معادلات حرکت برای ارتعاشات محوری میله‌ها با استفاده از تئوری ساده ۲۶
۲-۳-۲- استخراج معادلات حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتن ۲۶
۳-۳-۲- استخراج معادلات حرکت با استفاده از اصل هامیلتون ۲۷
۴-۳-۲- معرفی برخی شرایط مرزی برای میله‌ها ۳۰
۱-۳-۲- شرایط مرزی ترکیبی در میله‌ها ۳۱
۲-۳-۲- محاسبه شرایط مرزی ترکیبی با استفاده از قانون دوم نیوتن ۳۵
۳-۳-۲- معادلات حرکت ارتعاشات طولی میله‌ها با استفاده از تئوری ریلی ۳۸
۴-۳-۲- معادلات حرکت ارتعاشات طولی میله‌ها با استفاده از تئوری بیشاپ ۴۰

۴-۲- ارتعاشات پیچشی میله‌ها ۴۱
۱-۴-۲- استخراج معادلات حرکت ارتعاشات پیچشی میله‌ها با استفاده از اصل هامیلتون ۴۱
۲-۴-۲- استخراج معادلات حرکت یک شفت تحت ارتعاشات پیچشی با قانون دوم نیوتن ۴۵
۳-۴-۲- معرفی برخی شرایط مرزی برای شفت‌های تحت پیچش ۴۶
۴-۴-۲- شرایط مرزی ترکیبی برای شفت پیچشی ۴۷
۵-۴-۲- محاسبه شرایط مرزی ترکیبی با استفاده از قانون دوم نیوتن ۵۲
۶-۴-۲- تشابه بین ارتعاشات پیچشی و محوری شفت‌ها و ارتعاشات عرضی طناب‌ها ۵۵
۷-۴-۲- ارتعاشات پیچشی شفت‌های غیر دایروی ۵۶
۸-۴-۲- تحلیل ارتعاشات پیچشی شفت‌های غیر دایروی با استفاده از تئوری لاو ۶۱
۹-۴-۲- تحلیل ارتعاشات پیچشی شفت‌های غیر دایروی با استفاده از تئوری تیموشنکو- گری ۶۲
۱۰-۴-۲- صلبیت پیچشی شفت‌های با مقطع غیر دایروی ۶۵
۱۱-۴-۲- تشابه غشاء پرانتل ۷۰
۱۲-۴-۲- محاسبه صلبیت پیچشی برای میله با مقطع مستطیلی ۷۶

تمرین‌ها ۷۹

فصل ۳: ارتعاشات عرضی تیرها ۸۳

۳-۱- مقدمه ۸۴

۳-۲- انواع تئوری تیرها ۸۵
۳-۲-۱- تئوری تیر اویلر- برنولی ۸۵
۳-۲-۲- تئوری تیر ریلی ۸۶
۳-۲-۳- تئوری تیر تیموشنکو ۸۶

۳-۳- مقایسه تیر تیموشنکو و اویلر-برنولی ۸۷

۳-۴- معادلات حرکت برای ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکو ۸۸
۳-۴-۱- استخراج معادلات حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتن ۹۰
۳-۴-۱- معادلات حرکت تیر تیموشنکو با استفاده از اصل هامیلتون ۹۲

۳-۵- معرفی برخی شرایط مرز برای تیر تیموشنکو ۹۶
۳-۵-۱- شرط مرزی آزاد ۹۶
۳-۵-۲- تکیه‌گاه گیردار ۹۷
۳-۵-۳- تکیه‌گاه مفصلی ۹۷
۳-۵-۴- تکیه‌گاه لغزان ۹۷

۳-۶- شرایط مرزی هندسی و طبیعی ۱۰۰

۳-۷- شرایط مرزی ترکیبی ۱۰۱

۳-۸- شرایط مرزی ترکیبی با استفاده از قانون دوم نیوتن ۱۰۷

۳-۹- معادلات حرکت ارتعاشات عرضی تیر اویلر- برنولی ۱۱۱
۳-۹-۱- استخراج معادلات حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتن ۱۱۱
۳-۹-۲- استخراج معادلات حرکت با استفاده از اصل هامیلتون ۱۱۳
۳-۹-۳- استخراج معادلات حرکت تیر اویلر- برنولی از روی معادلات تیر تیموشنکو ۱۱۶

۴-۹-۳- معرفی برخی شرایط مرز تیر اویلر- برنولی ۱۱۶
۵-۹-۳- شرایط مرزی ترکیبی ۱۱۹
۶-۹-۳- معرفی برخی شرایط مرزی ویژه ۱۲۳

۱۰-۳- تئوری تیر ریلی ۱۲۶

۱۱-۳- نوشتن معادلات تیر تیموشنکو برحسب یک متغیر برای تیر یکنواخت ۱۲۹

تمرین‌ها ۱۳۰

فصل ۴: رویکرد حل مسائل سیستم‌های پیوسته ۱۳۳

۱-۴- مقدمه ۱۳۴

۲-۴- معادله حرکت یک سیستم پیوسته در حالت کلی ۱۳۴
۱-۲-۴- حل معادله دیفرانسیل همگن حرکت ۱۳۶

۳-۴- مسأله اشتروم- لیوویل ۱۳۸
۱-۳-۴- توابع متعامد ۱۳۹

۴-۴- مسأله مقدار ویژه در حالت کلی ۱۴۰

۵-۴- معرفی برخی توابع مهم ۱۴۱
۱-۵-۴- توابع پذیرا ۱۴۱
۱-۵-۴- توابع قیاسی (مقایسه‌ای) ۱۴۱
۲-۵-۴- توابع ویژه ۱۴۱

۶-۴- مسأله مقدار ویژه با شرط مرزی فاقد مقدار ویژه ۱۴۲
۱-۶-۴- خودالحاقی مسأله مقدار ویژه ۱۴۲
۲-۶-۴- مفهوم خودالحاقی در سیستم‌های گسسته ۱۴۲
۳-۶-۴- اپراتورهای مثبت معین و مثبت نیمه معین ۱۴۳

۴-۶-۴- سیستم ارتعاشی مثبت معین یا مثبت نیمه معین..... ۱۴۳
۵-۶-۴- تعبیر فیزیکی مثبت معین و مثبت نیمه معین..... ۱۴۳
۶-۶-۴- تعامد بین توابع ویژه(شکل مودها)..... ۱۴۴
۷-۶-۴- اثبات تعامد مودهای سیستم پیوسته از روی مودهای سیستم گسسته ۱۴۶

۷-۴- تئوری بسط (تئوری گسترش)..... ۱۴۷

۸-۴- تأثیر یک فنر در تبدیل یک سیستم مثبت نیمه معین به یک سیستم مثبت معین ۱۷۳

۹-۴- خودالحاقی و مثبت معین بودن برای سیستم‌هایی با شرایط مرزی وابسته به مقدار ویژه..... ۱۷۶

۱۰-۴- شرایط خودالحاقی مسأله مقدار ویژه با شرایط مرزی وابسته به مقدار ویژه..... ۱۷۷

۱۱-۴- شرایط مثبت معین بودن مسأله مقدار ویژه با شرایط مرزی وابسته به مقدار ویژه ۱۷۷

۱۲-۴- شرط تعامد بین مودها (توابع ویژه) در مسأله مقدار ویژه با شرایط مرزی وابسته به مقدار ویژه ۱۷۸

۱۳-۴- سیستم های ارتعاشی کوپل شده..... ۱۸۶
۱-۱۳-۴- بررسی خودالحاقی و مثبت معین بودن سیستمهای کوپل شده..... ۱۸۹

۱۴-۴- تعیین فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای تیر تیموشنکو..... ۱۹۶

۱۵-۴- تقارن و شکل مود ۲۰۰

۱۶-۴- پاسخ همگن معادله حرکت یک سیستم ارتعاشی..... ۲۰۶

۱۷-۴- روش دوم در پیدا کردن پاسخ سیستم به شرایط اولیه..... ۲۱۱
۱-۱۷-۴- حل معادله حرکت در حالت ناهمگن (پاسخ به تحریک خارجی) ۲۱۴

تمرین‌ها ۲۲۱

فصل ۵: ارتعاشات غشاءها ۲۲۷

۵-۱- مقدمه ۲۲۸

۵-۲- معادلات حرکت یک غشاء با استفاده از قانون دوم نیوتن ۲۲۸

۵-۳- معادلات حرکت یک غشاء با استفاده از اصل هامیلتون ۲۳۱

۵-۴- شرایط مرزی مختلف برای غشاء ۲۳۴

۵-۵- بررسی مسأله مقدار ویژه و خودالحاقی برای مسأله غشاء ۲۳۵

۵-۶- بررسی مثبت معین بودن مسأله غشاء ۲۳۸

۵-۷- ارتعاشات آزاد غشاء مستطیلی ۲۴۰

۵-۸- پاسخ ارتعاشات آزاد یک غشاء مستطیلی با شرایط گیردار ۲۴۲

۵-۹- شکل مودهای غشاء مستطیلی ۲۴۵

۵-۱۰- شرط تعامد بین شکل مودهای یک غشاء ۲۵۳

۵-۱۱- ارتعاشات اجباری غشاءهای مستطیلی ۲۵۳

۵-۱- ارتعاشات آزاد غشاء دایروی ۲۵۷
۵-۱-۱- معادله حرکت ۲۵۷
۵-۱-۲- ارتعاشات آزاد غشاء دایروی با مرز گیردار ۲۵۹
۵-۱-۳- تعامد بین مودها و نرمالیزه کردن مودهای ارتعاشی ۲۶۱
۵-۱-۴- پاسخ ارتعاشی غشاء دایروی به شرایط اولیه ۲۶۴

۵-۲- ارتعاشات اجباری غشاء دایروی ۲۶۸

۳-۵- ارتعاشات آزاد غشاء دایروی حلقوی ۲۷۱

۴-۵- ارتعاشات آزاد غشاء با شکل قطاعی از دایره ۲۷۳

تمرینها ۲۷۶

فصل ۶: ارتعاشات ورق‌ها ۲۷۸

۱-۶- مقدمه ۲۷۹

۲-۶- معادلات حرکت برای ارتعاشات ورق‌ها بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها ۲۷۹

۳-۶- معادلات حرکت ارتعاشات عرضی ورق‌ها با استفاده از قانون دوم نیوتن ۲۸۰

۴-۶- روابط بین کرنش و جابجایی برای ورق‌ها ۲۸۳

۵-۶- روابط بین گشتاور- جابجایی و نیروی برشی- جابجایی ۲۸۵

۶-۶- معادله حرکت بر حسب جابجایی ۲۸۶

۷-۶- معادلات حرکت ارتعاشات عرضی ورق‌ها با استفاده از اصل هامیلتون ۲۸۶

۸-۶- شرایط مرزی ورق‌ها ۲۹۵
۱-۸-۶- شرط مرزی برای لبه گیر دار، ثابت یا لبه جاسازی شده ۲۹۵
۲-۸-۶- شرایط مرزی برای لبه ساده ۲۹۵
۳-۸-۶- شرایط مرزی برای لبه آزاد ۲۹۵
۴-۸-۶- شرایط مرزی برای مرزی که روی یک فنر خطی الاستیک است ۲۹۷
۵-۸-۶- شرایط مرزی برای مرزی که روی یک فنر الاستیک پیچشی است ۲۹۸
۶-۸-۶- شرایط مرزی روی لبه مورب ۲۹۸

۹-۶- بررسی مسأله مقدار ویژه و خودالحاقی برای مسأله ارتعاشات ورق ۳۰۱
۱-۹-۶- بررسی خودالحاقی برای ورق گیردار ۳۰۲

۲-۹-۶- بررسی خودالحاقی برای ورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه مفصلی ۳۰۲

۱۰-۶- بررسی مثبت معین بودن مسأله ورق ۳۰۴

۱۱-۶- ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ۳۰۶

۱۲-۶- حل ارتعاشات آزاد برای ورق با شرایط مرزی ساده ۳۰۸

۱۳-۶- ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی با سایر شرایط مرزی ۳۱۰

۱۴-۶- شرط تعامد بین شکل مودهای یک ورق ۳۱۵

۱۵-۶- ارتعاشات اجباری ورق‌های مستطیلی ۳۱۶

۱۶-۶- ورق‌های دایروی ۳۱۹
۱-۱۶-۶- معادله حرکت ورق‌های دایروی ۳۱۹
۲-۱۶-۶- روابط تبدیل ۳۲۱

۱۷-۶- گشتاور و نیرو در ورق دایروی ۳۲۲
۱-۱۷-۶- شرایط مرزی ۳۲۳

۱۸-۶- ارتعاشات آزاد ورق‌های دایروی ۳۲۴

۱۹-۶- پاسخ ارتعاشات آزاد ورق دایروی با شرط مرزی گیردار ۳۲۷

۲۰-۶- پاسخ ارتعاشات آزاد ورق دایروی با شرط مرزی آزاد ۳۳۰

تمرینها ۳۳۱

فصل ۷: روش‌های تقریبی ۳۳۴

۱-۷- مقدمه ۳۳۵

۲-۷- نسبت ریلی یا ضریب ریلی ۳۳۶

۳-۷- تئوری حصار ۳۳۹
۱-۳-۷- روش انرژی ریلی ۳۴۱
۲-۳-۷- روش ریلی- ریتز ۳۴۶
۳-۳-۷- روش ریلی ـ ریتز بازبینی شده ۳۵۳
۴-۳-۷- روش مودهای فرضی (معادلات لاگرانژ) ۳۶۱
۵-۳-۷- روش باقی مانده‌های وزنی ۳۶۶

تمرینها ۳۸۱

فهرست مراجع ۳۸۶

واژه‌نامه‌ها ۳۸۸
واژگان فارسی به انگلیسی ۳۸۹
واژگان انگلیسی به فارسی ۴۰۰

نمایه ۴۱۲

فصل ۱: معرفی سیستم‌های پیوسته

۱-۱- مقدمه

منظور از "ارتعاشات سیستم‌های پیوسته" چیست؟ در ابتدا ارتعاش را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

" حرکت تناوبی ذرات یک جسم یا یک محیط حول نقطه‌ی تعادلشان در اثر ایجاد اغتشاش."

همچنین کلمه متناوب به صورت " دور زدن در فواصل منظم" تعریف می‌شود. این تعاریف برای یک فرد غیر متخصص می‌باشد. برای مهندسین مفهوم متناوب، تکرار شدن در زمان خواهد بود. بدین صورت که متناوب یعنی حرکتی که دقیقا خودش را در زمان تکرار می‌کند. همچنین گاهی از عبارت "نزدیک به متناوب[۱]" نیز استفاده می‌شود که مثلا ارتعاشات آزاد یک سیستم با دمپر از این نوع است.

عبارت " سیستم پیوسته" خیلی واضح نمی‌باشد. در مفاهیمی‌که در این کتاب استفاده می‌شود شاید بهتر باشد که از عبارت‌های " جسم پیوسته[۲]" یا محیط پیوسته[۳]" استفاده شود. در هر حال عبارت "سیستم پیوسته" در متون فنی استفاده شده است. همچنین ممکن است علت استفاده از این عبارت این باشد که بخواهند آن را در مقابل سیستم گسسته[۴] قرار دهند. سیستم‌های پیوسته به تفصیل در ادامه شرح داده خواهد شد.

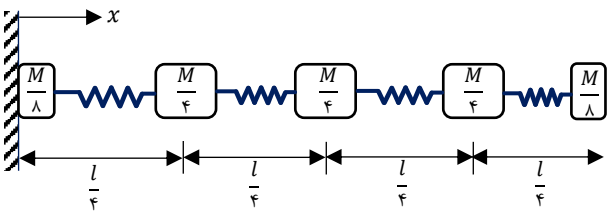
۱-۲- یک سیستم پیوسته چیست؟

همانطور که در بخش گذشته اشاره شد، واژه پیوسته در مقابل گسسته آورده شده است. سیستم‌های گسسته سیستم‌هایی هستند که در آن‌ها جرم، فنریت و میرایی به صورت مجزا مدلسازی شده‌اند. در سیستم‌های گسسته، اجزاء اصلی شامل جرم، فنر و دمپر می‌باشند. فنر نماینده‌ی انعطاف‌پذیری جسم و دمپر نماینده عوامل استهلاک انرژی است. در این سیستم‌ها فرض می‌شود که فنر بدون جرم است و جرم سیستم فاقد فنریت است و صلب فرض می‌شود. برای مثال نمونه ای از یک سیستم گسسته درشکل ۱-۱ آورده شده است.

اما موارد زیادی وجود دارد که در آن‌ها این امکان وجود ندارد که فنریت و جرم سیستم را از یکدیگر جدا نمود. ممکن است هر قسمت از سیستم دارای جرم و سفتی باشد و همچنین این خصوصیات از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر کند.

---

[۱] *Nearly periodic*
[۲] *Continuous body*
[۳] *Continuum*
[۴] *Discrete system*



شکل ۱-۱ نمونه‌ای از یک سیستم گسسته

در این حالت باید از مدل‌های پیوسته‌ی ریاضی استفاده کرد. برای بدست آوردن معادلات حرکت این سیستم‌ها، می‌توان از تئوری مربوط به اجسام شکل‌پذیر استفاده کرد، در این تئوری برای هر جسم شکل پذیر، میدان‌های جابجایی به صورت $u(x,y,z,t)$، $v(x,y,z,t)$ و $w(x,y,z,t)$ نمایش داده می‌شوند که این میدان‌ها باید شرایط اولیه و شرایط مرزی را ارضاء نمایند.

معادلات حرکت سیستم‌های پیوسته از دسته‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی می‌باشند. به این دسته از معادلات، همراه با شرایط مرزی آن‌ها مسأله مقدار مرزی[۱] گفته می‌شود. مسائل مقدار مرزی زمانی که معادله‌ی حرکت و شرایط مرزی متناظر با آن همگن باشند به یک مسأله مقدار ویژه تبدیل می‌شود که این معادله به پارامتر مقدار ویژه(λ) وابسته است. بنابراین مسأله مقدار ویژه تنها برای مقادیر مشخصی از پارامتر مقدار ویژه جواب خواهد داشت.

۱-۳- سیستم‌های پیوسته مرسوم در مهندسی

در این قسمت به معرفی سیستم‌های پیوسته‌ای که کاربرد فراوانی در مدل‌سازی سیستم‌های واقعی دارند پرداخته می‌شود. در ادامه تقسیم‌بندی این سیستم‌های پیوسته ارائه شده است:

۱- طناب‌ها، کابل‌ها و نخ‌ها[۲]
۲- میله‌ها[۳]
۳- تیرها و شفت‌ها[۴]
۴- غشاءها[۵]
۵- ورق ها[۶] (صفحات)
۶- پوسته‌ها[۷]

---

۱ *Boundary value problem*
۲ *Ropes, cables and strings*
۳ *Rods*
۴ *Beams and Shafts*
۵ *Membranes*
۶ *Plates*
۷ *Shells*