



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# حل مسئله ریاضی، از نظریه تا عمل

## چشم‌اندازی برای آموزش معلمان ریاضی

تألیف:

**دکتر ابراهیم ریحانی**

عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

سعید حق‌جو

|                     |  |
|---------------------|--|
| سرشناسه             | : ریحانی، ابراهیم، ۱۳۴۵-   |
| عنوان و نام پدیدآور | : حل مسئله ریاضی، از نظریه تا عمل: چشم‌اندازی برای آموزش معلمان ریاضی/ تألیف ابراهیم ریحانی، سعید حق‌جو؛ ویراستار عاطفه نجیبی. |
| مشخصات نشر          | : تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۹۹.  |
| مشخصات ظاهری        | : ۲۹۲ ص: مصور، جدول.   |
| شابک                | : ۹۷۸-۶۲۲-۶۵۸۹۰۸-۶   |
| وضعیت فهرست نویسی   | : فیبا   |
| یادداشت             | : واژه‌نامه.   |
| یادداشت             | : کتابنامه: ص. [۲۶۵] - ۲۸۳.  |
| یادداشت             | : نمایه.   |
| موضوع               | : حل مسئله   |
| موضوع               | : Problem solving  |
| شناسه افزوده        | : حق‌جو، سعید، ۱۳۵۷-   |
| شناسه افزوده        | : دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی  |
| شناسه افزوده        | : Shahid Rajaei Teacher Training University  |
| ده بندی کنگره       | : QA۶۳   |
| ده بندی دیوبی       | : ۷۶/۵۱۰   |
| شماره کتابشناسی ملی | : ۷۳۹۴۹۲۲  |



دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

|               |  |
|---------------|--|
| عنوان         | : حل مسئله ریاضی، از نظریه تا عمل  |
| تألیف         | : دکتر ابراهیم ریحانی، عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی/ سعید حق‌جو |
| ویراستار ادبی | : عاطفه نجیبی  |
| نوبت چاپ      | : اول- زمستان ۱۳۹۹   |
| انتشارات      | : دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی  |
| لیتوگرافی     | : رجاء نقشینه  |
| چاپ           | : شریف   |
| طراح جلد      | : شهرام طهماسبی  |
| ناظر چاپ      | : محمد معتمدی نژاد   |
| صفحه‌آرا      | : نیره فیروزی  |
| کارشناسان     | : طاهره کیا/ علی رضایی اهوآنوی   |
| شمارگان       | : ۱۰۰۰ جلد   |
| قیمت          | : ۵۰۰,۰۰۰ ریال   |
| شابک          | : ۹۷۸-۶۲۲-۶۵۸۹۰۸-۶   |
|               | : ISBN: 978-622-658908-6   |

کلیه حقوق این اثر برای مؤلفان و مترجمان و دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی محفوظ است.

نشانی: تهران، لویزان، کد پستی ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸، صندوق پستی ۱۶۳ - ۱۶۷۸۵، تلفن: (۲۶۳۲) ۹ - ۲۲۹۷۰۰۶۰، تلفکس: ۲۲۹۷۰۰۴۲، پست الکترونیکی: [publish@sru.ac.ir](mailto:publish@sru.ac.ir)، وب سایت: <http://publish.sru.ac.ir>

این اثر ناچیز به پیشگاه با عظمت صدیقه کبری  
حضرت فاطمه زهرا (س) تقدیم می شود.



## مقدمه مؤلفان

پژوهش‌ها دو هدف عمده را برای آموزش ریاضی برشمرده‌اند. اولین هدف که ایده‌ای خوب، ولی محدود به حساب می‌آید، کسب توانایی برای انجام دادن محاسبات است. برخی نیز این هدف را به کارگیری یا کاربرد ریاضیات تعبیر کرده‌اند. هدف دوم که اساسی‌تر و ارزشمندتر تلقی می‌شود، پرورش تفکر است. توجه به تفکر و پرورش آن در فرهنگ اسلامی نیز مورد نظر بوده و بر آن تأکید شده است. حل مسئله یکی از بهترین راه‌های پرورش تفکر ریاضی به حساب می‌آید. به‌طور ساده "مسئله" را می‌توان روبه‌رو شدن با چالشی دانست که روش از پیش آماده‌ای برای حل آن وجود ندارد. همان‌گونه که پولیا می‌گوید، مسئله می‌تواند پیچیده یا ساده باشد. در حالت اول، پیدا کردن راه‌حل آن دشوار و در حالت دوم آسان است. در ضمن دشواری راه‌حل تا حد زیادی به خود مفهوم مسئله مربوط می‌شود، آنجا که دشواری نباشد، مسئله‌ای وجود ندارد.

امروزه رویکرد حل مسئله در برنامه‌دستی بسیاری از کشورها، جایگاه ویژه‌ای دارد. در سال‌های اخیر، آموزش هنر حل مسئله و آموزش از طریق حل مسئله و پژوهش حول این محورها در کشور ما، مورد توجه قرار گرفته است. تغییرات صورت گرفته در کتاب‌های درسی، ظرفیت‌های بالایی برای پرورش تفکر ریاضی با تکیه بر رویکرد حل مسئله فراهم کرده است. در این میان، آموزش معلمان ریاضی برای عملی ساختن رویکرد حل مسئله در کلاس درس، ارزش بالایی دارد و البته برای طی این مسیر، هنوز کارهای زیادی باید انجام گیرد. تغییرات آموزشی زمانی تأثیر مناسبی خواهند گذاشت که مجریان اصلی آنها مورد حمایت قرار گیرند. تولید محتوای مناسب برای آموزش معلمان در مورد رویکرد حل مسئله، یک جزء ضروری از این حمایت به حساب می‌آید.

مؤلفان کتاب حاضر "حل مسئله ریاضی، از نظریه تا عمل" کوشیده‌اند تا با استفاده از ایده‌های نظری مربوط به فرایند حل مسئله در حل یک مسئله با ارزش و چگونگی استفاده از این مبانی نظری و توضیح کارکرد آنها، تلفیق نظریه و عمل را به نمایش بگذارند. این کتاب حاصل تجربه تدریس بخشی از درس بنیادهای نظری حل مسئله است که به دانشجویان کارشناسی ارشد آموزش ریاضی در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی (از سال ۱۳۸۴ تا کنون) ارایه شده یا در برگزاری کارگاه‌های حل مسئله در استان‌های مختلف کشور به دست آمده است. از این رو، این کتاب می‌تواند به‌عنوان منبعی آموزشی برای درس بنیادهای نظری حل مسئله در دوره‌های تحصیلات تکمیلی آموزش ریاضی مورد استفاده قرار گیرد.

در فصل اول این کتاب برخی از چارچوب‌های نظری مطرح در مورد حل مسئله ریاضی که در فصل‌های بعد از آنها استفاده شده‌است، مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین، عوامل مهم دخیل در فرایند حل مسئله تبیین و تشریح شده است. بخش مهمی از این عوامل شامل طرح ایده‌ها، حدسیه‌سازی، استدلال منطقی، تصمیم‌سازی<sup>۱</sup>، طرح مسائل<sup>۲</sup> مرتبط، راه‌حل‌های چندگانه<sup>۳</sup> و در نهایت تعمیم<sup>۴</sup> مسئله اصلی است. چارچوب نظری مورد استفاده ترکیبی از دیدگاه‌های شونفلد، پولیا<sup>۵</sup>، میسن و تحقیقات آمبروس و بارسزی-وریس (۲۰۱۶) است. روش کار، بررسی عمیق یک سؤال از مسابقات ریاضی است، به‌گونه‌ای که ضمن تشریح چگونگی فرایند حل، نحوه بهره‌گیری از مبانی نظری حل مسئله نیز آموزش داده شود. همچنین قصد آن بوده است که استادان و دبیران ریاضی با الگو قرار دادن این مسئله بتوانند شیوه مناسبی برای اداره جلسات یا کارگاه‌های حل مسئله ریاضی اتخاذ کنند. کتاب حاضر می‌تواند به‌عنوان مرجعی برای درس حل مسئله ریاضی در دوره‌های کارشناسی ریاضی و آموزش ریاضی و دوره‌های تحصیلات تکمیلی آموزش ریاضی و نیز کارگاه‌های آموزش حل مسئله ریاضی مورد استفاده قرار گیرد. امید است همکاران و استادان محترم با ارسال دیدگاه‌ها، نظرات و نقدهای خود از طریق پست الکترونیک ما را در اصلاح و ویرایش کتاب برای چاپ‌های بعدی یاری نمایند.

مؤلفان

زمستان ۱۳۹۹

e\_reyhani@sru.ac.ir

s.haghjoo@sru.ac.ir

<sup>1</sup> Decision –making

<sup>2</sup> Problems posing

<sup>3</sup> Multiple solutions

<sup>4</sup> Generalization

<sup>5</sup> Polya

## فهرست مطالب

صفحه

عنوان

| ۱  | فصل اول: مبانی نظری – بخش اول (چارچوب‌های حل مسئله) |
|----|---|
| ۳  | مقدمه.....  |
| ۵  | مسئله ریاضی چیست؟.....                              |
| ۹  | چارچوب‌های بررسی فرایند حل مسئله.....               |
| ۱۱ | چارچوب حل مسئله پولیا.....                          |
| ۱۵ | نگاهی دیگر به مرحله چهارم پولیا.....                |
| ۱۶ | فراشناخت.....                                       |
| ۲۷ | طبقه‌بندی فراشناخت.....                             |
| ۳۲ | حل یک مسئله به کمک چارچوب پولیا.....                |
| ۴۰ | چارچوب حل مسئله شونفلد.....                         |
| ۴۶ | رهیافت، راهبرد و راه‌حل.....                        |
| ۴۹ | حل مسئله با چارچوب توصیفی شونفلد.....               |
| ۵۶ | نظریه رفتار هدف-محور برای حل مسئله.....             |
| ۵۸ | چارچوب حل مسئله کارلسون و بلوم.....                 |
| ۵۹ | چارچوب حل مسئله ویلسون و همکاران.....               |
| ۶۰ | چارچوب حل مسئله میسن و همکاران.....                 |

|    |   |
|----|---|
| ۶۵ | ..... حل یک مسئله با چارچوب میسن و همکاران    |
| ۷۳ | ..... مقایسه‌ای کوتاه بین چارچوب‌های حل مسئله |
| ۸۱ | ..... جمع‌بندی فصل ۱                          |
| ۸۲ | ..... پرسش‌ها و مسئله‌های پایانی فصل اول      |

### فصل دوم: مبانی نظری – بخش دوم (پژوهش‌های پیرامون حل مسئله) ۸۹

|     |   |
|-----|---|
| ۹۱  | ..... حل مسئله مشارکتی (چارچوب پیزا)                              |
| ۹۹  | ..... جایگاه حل مسئله در برنامه درسی                              |
| ۱۰۶ | ..... پژوهش‌های اخیر در مورد حل مسئله                             |
| ۱۱۴ | ..... ارتباط استدلال و اثبات با حل مسئله                          |
| ۱۳۰ | ..... طرح مسئله ریاضی   |
| ۱۳۴ | ..... چارچوب‌های طرح مسئله ریاضی                                  |
| ۱۳۶ | ..... مدل ویسترو-یو برای طرح مسئله با ایده گرفتن از یک روش ادبیات |
| ۱۴۴ | ..... توانایی یک تکلیف: مسئله ریاضی خوب و با ارزش                 |
| ۱۴۷ | ..... انواع مسائل در ریاضیات                                      |
| ۱۵۶ | ..... راه‌حل‌های چندگانه  |
| ۱۵۹ | ..... اشاره‌ای به سیر تکامل فرایند حل مسئله از گذشته تا به حال    |
| ۱۶۱ | ..... داربست زنی  |
| ۱۶۶ | ..... جمع‌بندی فصل دوم  |
| ۱۶۶ | ..... پرسش‌ها و مسئله‌های پایانی فصل دوم                          |

### فصل سوم: بیان مسئله اصلی و راه‌حل‌های چندگانه مسئله در حالت دو بعدی ۱۷۱

|     |   |
|-----|---|
| ۱۷۳ | ..... مبانی و چارچوب تحلیل و بررسی فرایند حل مسئله مورد استفاده در کتاب |
| ۱۷۵ | ..... بیان مسئله اصلی و انتخاب راهبرد (مسئله ۱)                         |
| ۱۷۶ | ..... اهمیت نابرابری‌ها در ریاضیات                                      |
| ۱۷۶ | ..... فهم و وضوح مسئله  |
| ۱۷۸ | ..... ایده‌ها، اثبات‌ها و شکست‌ها در مورد مسئله ۱                       |
| ۱۸۰ | ..... بیان مسئله ۲  |
| ۱۸۰ | ..... اثبات‌ها و شکست‌ها در مورد مسئله ۲                                |
| ۱۹۴ | ..... جمع‌بندی فصل سوم  |
| ۱۹۵ | ..... پرسش‌ها و مسئله‌های پایانی فصل سوم                                |



**فصل چهارم: راه‌حل‌های چندگانه مسئله اصلی (برای حالت سه‌بعدی)**

|     |  |
|-----|--|
| ۱۹۹ | ..... راه‌حل‌های مسئله ۱   |
| ۲۰۰ | ..... روش اول حل مسئله ۱: اثبات بازگشتی                                  |
| ۲۰۰ | ..... روش دوم حل مسئله ۱: اثبات هندسی                                    |
| ۲۰۳ | ..... روش سوم حل مسئله ۱: دسته‌بندی مناسب، نابرابری حسابی- هندسی و اتحاد |
| ۲۰۵ | ..... روش چهارم حل مسئله ۱: استفاده از نابرابری میانگین توافقی           |
| ۲۰۸ | ..... جمع‌بندی فصل چهارم   |
| ۲۰۸ | ..... پرسش‌ها و مسئله‌های پایانی فصل چهارم                               |

**فصل پنجم: گذر از حالت سه‌بعدی به تعمیم**

|     |   |
|-----|---|
| ۲۱۳ | ..... گذر از حالت سه‌بعدی به تعمیم        |
| ۲۱۳ | ..... تعمیم                               |
| ۲۱۶ | ..... تعمیم نزدیک (مسئله ۳)               |
| ۲۱۹ | ..... تعمیم دور (مسئله ۵)                 |
| ۲۲۳ | ..... جمع‌بندی فصل پنجم                   |
| ۲۲۵ | ..... پرسش‌ها و مسئله‌های پایانی فصل پنجم |

**فصل ششم: راه‌حل‌های خلاقانه مسئله اصلی**

|     |  |
|-----|--|
| ۲۲۹ | ..... خلاقیت                             |
| ۲۳۰ | ..... نابرابری هولدر                     |
| ۲۳۳ | ..... تعمیم عام مسئله (مسئله ۶)          |
| ۲۳۴ | ..... روش مخلوط کردن متغیرها             |
| ۲۳۸ | ..... جمع‌بندی فصل ششم                   |
| ۲۳۸ | ..... پرسش‌ها و مسئله‌های پایانی فصل ششم |

**فصل هفتم: مسائلی برای حل و جمع‌بندی**

|     |   |
|-----|---|
| ۲۴۳ | ..... خلاصه و جمع‌بندی                                      |
| ۲۴۵ | ..... فرایند طرح مسئله: تخصیص و انواع تعمیم در یک نگاه      |
| ۲۴۷ | ..... مسائل خاص و تعمیم‌یافته مرتبط با مسئله اصلی و پاسخ‌ها |

**۲۵۷ پیوست**

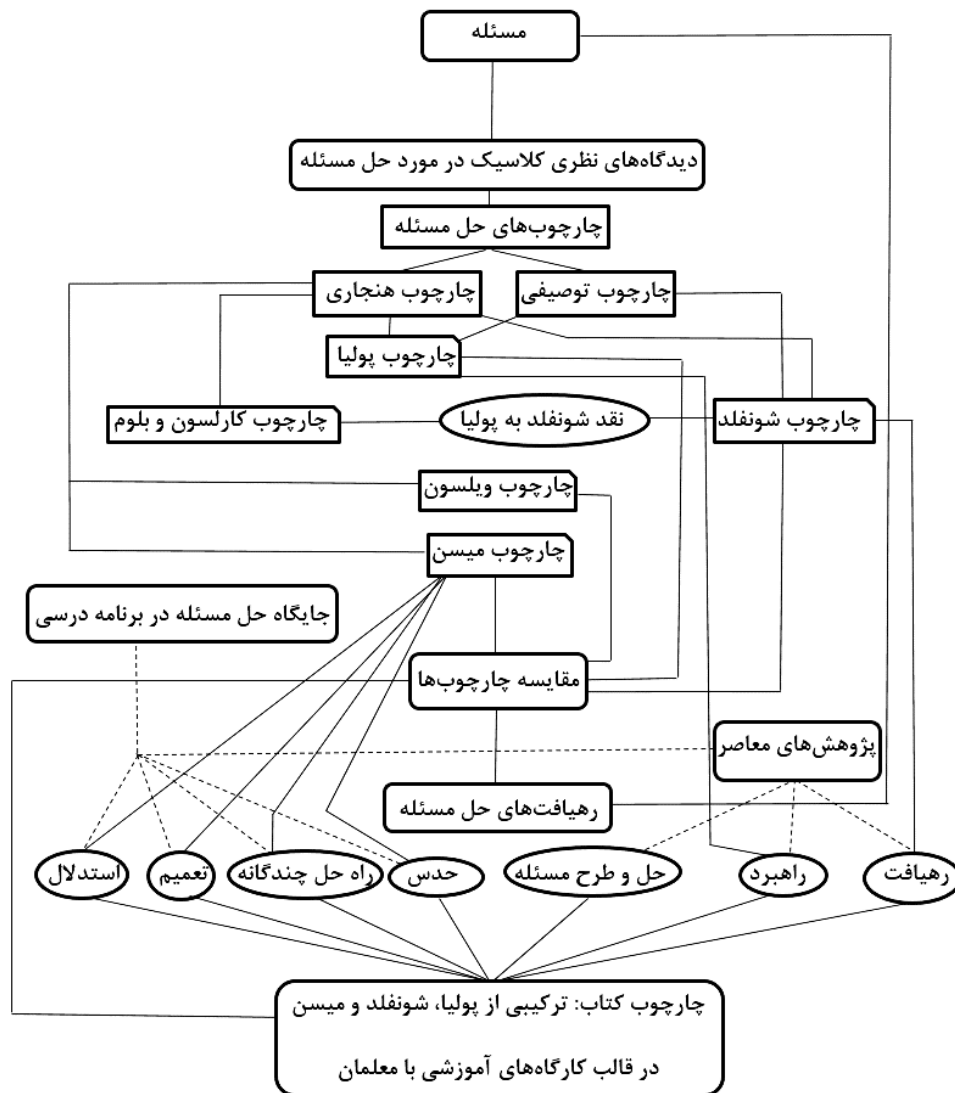
|     |                           |
|-----|---------------------------|
| ۲۶۳ | منابع                     |
| ۲۸۳ | واژه‌نامه فارسی - انگلیسی |
| ۲۸۷ | واژه‌نامه انگلیسی - فارسی |
| ۲۹۱ | نمایه                     |

## فصل اول: مبانی نظری

### بخش اول

معرفی برخی چارچوب‌های حل مسئله

## طرح کلی فصل اول و دوم



## مقدمه

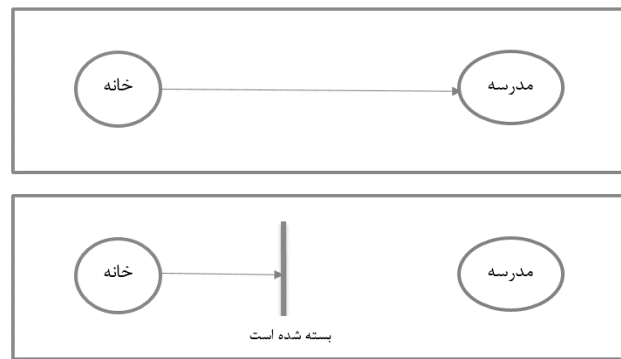
انسان‌ها در زندگی خود به‌طور معمول با موقعیت‌هایی چالش برانگیز، مواجه می‌شوند که در بدو امر، راه‌حل از پیش تعیین‌شده‌ای برای غلبه بر آن‌ها وجود ندارد، در چنین مواقعی، شخص با یک مسئله<sup>۱</sup> روبه‌رو است. برای مثال، فرض کنید شما همه‌روزه از یک مسیر مشخص از خانه به محل کار خود می‌روید و با تکرار این کار به یک زمان تقریبی مناسب برای طی کردن مسیر دست یافته‌اید و معمولاً به موقع رسیده‌اید. یک روز که برای شما بسیار مهم است و طبق زمان‌بندی قبلی حرکت کرده‌اید، در راه به مانعی برخورد می‌کنید و متوجه می‌شوید که مسیر همیشگی شما مسدود شده است. حال باید مسیر دیگری را امتحان کنید. در این شرایط شما با یک مسئله روبه‌رو هستید؛ باید مسیری را انتخاب کنید که در زمان مناسب شما را به مقصد برساند. انتخاب مسیر از بین مسیرهای مختلف، چگونگی پیمودن آن و کنترل زمان، شما را با موقعیتی روبه‌رو می‌کند که پیش از این با آن مواجه نشده بودید. شکل ۱، نمودار موقعیت یک مسئله را نشان می‌دهد.

در نوروز سال ۱۳۹۸ تعدادی از شهرهای ایران بر اثر بارندگی‌های فراوان دچار سیل‌های ویرانگری شدند که برخی از آنها در ۵۰ سال اخیر بی‌سابقه بوده‌اند. در آن زمان، مسئولان این شهرها با موقعیتی مواجه شدند که پیش از این آن‌را تجربه نکرده‌اند و به‌طور طبیعی با یک مسئله بزرگ تازه‌ای مواجه شده‌اند. همچنین اواخر بهمن ماه ۱۳۹۸ نیز کشور ایران درگیر یک ویروس

---

<sup>۱</sup> Problem

ناشناخته به نام ویروس کرونا (کووید<sup>۱</sup> ۱۹) شد که تا به حال پزشکان و پرستاران با درمان چنین بیماری آشنا نبودند. بنابراین برای جامعه پزشکان این موقعیت پیش آمده یک مسئله می باشد.



شکل ۱ نمودار موقعیت مسئله

در چنین شرایطی، به فرض پیش بینی و فراهم آوردن تمهیدات لازم برای دست و پنجه نرم کردن با موقعیت موجود، گستردگی سیل یا شیوع ویروس کرونا و مشکلات پیش بینی نشده، مسائل فراوانی را پیش روی دست اندرکاران و مسئولین قرار می دهد که برای حل آنها باید اقداماتی انجام دهند. یافتن راه حل مناسب برای این مسائل می تواند به رشد و توانمندی جامعه کمک فراوانی کند.

تعریف مسئله در ریاضیات نیز، مشابه موقعیت مسئله یا چالش در زندگی واقعی است. بسیاری از تکالیفی که حل آنها از دانش آموزان خواسته می شود، تمرین هایی بیش نیستند. دانش آموزان معمولاً از طریق حل مسائل و پاسخگویی به سؤالات، ریاضی را فرا می گیرند. یک سؤال<sup>۲</sup> ریاضی زمانی می تواند به عنوان مسئله تعریف شود که روتین و معمولی نباشد. سؤال غیر معمولی، سؤالی است که رویه حل آن برای دانش آموزان مشخص نیست. بنابراین، حل کردن آن برایشان جالب است (سوارسانا و همکاران، ۲۰۱۹). مسئله بایستی طوری باشد که دانش آموزان پتانسیل و توانایی حل کردن آن را داشته باشند.

مواجهه با مسائل در زندگی واقعی برای انسان اجتناب ناپذیر است و پیشرفت های جدید و گذشت زمان نیز همواره منجر به تولید مسائل تازه می شوند. رشد انسان در زندگی واقعی، وابسته به اراده او در مواجهه با مسائل و غلبه بر آنهاست. مسئله و تلاش برای حل آن، جزء جدایی ناپذیر

<sup>1</sup> COVID-19

<sup>2</sup> Quation

یادگیری ریاضی است. به هر حال حل مسئله ریاضی یکی از بهترین روش‌ها برای رشد تفکر ریاضی به حساب می‌آید. دانش‌آموزان از طریق فرایند حل مسئله، تجربه کسب می‌کنند. این تجربه توانایی تفکر دانش‌آموزان را در هنگام مواجه شدن با مسئله، برای تبدیل شدن به تفکری منطقی، تحلیلی، انتقادی و خلاق ارتقاء می‌دهد (سوارسانا و همکاران، ۲۰۱۹). برای بررسی بهتر این فرایند آموزشی، ابتدا تعریف مسئله و حل مسئله از دیدگاه پژوهشگران مطرح می‌شود. ادامه، جایگاه حل مسئله در برنامه درسی و برخی چارچوب‌های حل مسئله معرفی می‌گردند. سپس، برخی پژوهش‌های اخیر در مورد حل مسئله ارائه می‌شوند.

### مسئله ریاضی چیست؟

درباره اینکه یک مسئله ریاضی از چه اجزایی تشکیل می‌شود، نظرات زیادی وجود دارد. بعضی از افراد، مسائل را تمرین‌هایی<sup>۱</sup> معمولی برای منسجم‌سازی تکنیک‌های ریاضی تازه آموخته شده، تفسیر می‌کنند، اما بعضی دیگر، آنها را تکالیفی در نظر می‌گیرند که پیچیدگی‌شان مشکل‌ساز می‌شود یا به غیرمعمولی شدن آنها منجر می‌گردد (شونفلد<sup>۲</sup>، ۱۹۹۲). این مفهوم آخر درباره مسئله، نقطه تمرکز تحقیقات معاصر است. پولیا در اوایل دهه ۱۹۶۰ تأیید کرد که حل مسئله، یافتن راهی برای یک مشکل است؛ روشی برای رفع یک مانع یا رسیدن به هدفی که فوراً قابل دسترس نیست. به گفته بیل بروکز (۱۹۷۶)، زمانی چیزی را مسئله<sup>۳</sup> می‌دانیم که شخص، آن را به عنوان مسئله تجربه کند. ده سال بعد از این اظهار نظر، کریستنسن و والتر (۱۹۸۶) به دنبال ویگوتسکی<sup>۴</sup> این دیدگاه را مطرح کردند که تکلیف<sup>۵</sup> چیزی است که به دانش‌آموزان ارائه می‌شود یا آنان متعهد به اجرای آن می‌شوند و فعالیت<sup>۶</sup> چیزی است که در تلاش برای اجرای توضیح و تفسیر تکلیف، روی می‌دهد. با ترکیب این دیدگاه‌ها، می‌توان گفت که یک پدیده یا موقعیت، زمانی مسئله تلقی می‌شود که کسی در مواجهه با آن، حالت مسئله‌دار بودن<sup>۷</sup> را تجربه کند و تکالیف را بر اساس درک موقعیت بپذیرد و در فعالیت تصمیم‌گیری<sup>۸</sup> دخالت داشته باشد. در

<sup>1</sup> Exercises

<sup>2</sup> Shoenfeld

<sup>3</sup> Problem

<sup>4</sup> Vygotsky

<sup>5</sup> Task

<sup>6</sup> Activity

<sup>7</sup> Problematicity

<sup>8</sup> Sense-making

جدول ۱ چند تعریف از مسئله یا حل مسئله از نگاه آموزشگران و متخصصان آموزش ریاضی مشاهده می‌کنید.

جدول ۱ تعریف مسئله / حل مسئله از دیدگاه برخی آموزشگران

| آموزشگران                        | تعریف مسئله / حل مسئله  |
|----------------------------------|---|
| پولیا (۱۹۶۲)                     | مسئله عبارت است از ضرورت جست‌وجوی آگاهانه وسیله‌ای مناسب، برای رسیدن به هدفی روشن، ولی در بدو امر غیرقابل دسترس. حل مسئله، به معنای پیدا کردن این وسیله است.  |
| کانتوسکی (۱۹۷۷)                  | یک فرد وقتی با سؤالی برخورد می‌کند که نمی‌تواند به آن پاسخ بدهد یا در موقعیتی قرار می‌گیرد که با استفاده از دانش در دسترس خود، بلافاصله قادر به حل و فصل آن نیست، با مسئله مواجه شده است. در چنین شرایطی، او باید به راهکاری برای استفاده از اطلاعاتی که در اختیارش قرار دارد، فکر کند تا به هدف و راه حل مسئله دست یابد. |
| لستر (۱۹۸۰)                      | مسئله موقعیتی است که در آن الگوریتم ساده قابل دسترس برای انجام یک تکلیف توسط یک فرد یا گروه که بتواند بوضوح شیوه راه حل را مشخص کند، وجود ندارد.  |
| ریس، سایدام و لیند کوئیست (۱۹۹۹) | مسئله به موقعیتی اطلاق می‌شود که در آن، فرد چیزی را طلب می‌کند ولی نمی‌داند که چگونه به طور مستقیم به آن دست یابد. اگر "مسئله" چنان ساده باشد که شاگردان چگونگی یافتن پاسخ را بدانند یا بی‌درنگ آن را بیابند، در واقع نمی‌توان آن را مسئله نامید.   |
| شونفلد (۱۹۹۲)؛ (۱۹۸۵)            | مسئله، فعالیتی است که دانش‌آموز مشتاقانه در آن درگیر است و می‌کوشد برای آن راه‌حلی پیدا کند اما وسیله ریاضی در دسترس و از قبل آماده‌ای ندارد که با آن به هدف برسد.  |
| باچانان (۱۹۸۷)                   | مسائل ریاضی، مسائلی غیر معمولی‌اند که در فرایند راه‌حل آنها به چیزی بیش از رویه‌ها یا الگوریتم‌های آماده در دسترس، نیاز است.  |
| مک لئود (۱۹۸۸)                   | مسئله، تکالیفی است که در آن راه‌حل یا هدف بلافاصله قابل دستیابی نیست و هیچ الگوریتم واضحی وجود ندارد که دانش‌آموز از آن استفاده کند.  |
| (NCTM, ۲۰۰۰)                     | حل مسئله، درگیر شدن در وظیفه، تکلیف و کاری است که روش حل آن از پیش شناخته شده نیست. به همین سبب، دانش‌آموزان برای یافتن راه‌حل باید از دانش خودشان بهره گیرند. در این فرایند، آنها اغلب درک و فهم جدید ریاضی خود را رشد و توسعه خواهند داد.   |

آنچه می‌تواند به‌عنوان ویژگی مشترک تعاریف ارائه شده در جدول ۱ در نظر گرفته شود، این است که پاسخ یا حل مسئله، از پیش آماده و حاضر نیست و البته به‌دست آوردن آن، مستلزم درگیر شدن در یک چالش است. همچنین حل مسئله، مستلزم تجربه موقعیت‌های جدید و پافشاری بر عبور موفقیت‌آمیز از آنهاست. در هر حال، رشد تفکر ریاضی با تأکید محض بر رویه‌ها



و الگوریتم‌ها و دستورها و قواعد، حاصل نخواهد شد. در جدول ۲ تعاریف مسئله یا حل مسئله از نگاه برخی روان‌شناسان ارائه شده است.

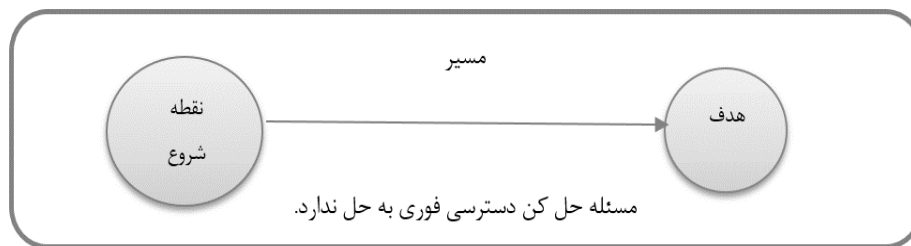
جدول ۲ تعریف مسئله / حل مسئله از دیدگاه برخی روان‌شناسان

| روان‌شناسان                  | تعریف مسئله / حل مسئله  |
|------------------------------|---|
| کاک گرافت<br>(۱۹۸۲)          | حل مسئله توانایی به کار بردن ریاضیات در موقعیت‌های مختلف است و دانش‌آموز نمی‌تواند حل یک مسئله ریاضی را آغاز کند؛ مگر این که مسئله، به عبارت‌های مناسبی تبدیل شود. این نخستین و اصلی‌ترین گام، مشکلات فراوانی را برای بسیاری از دانش‌آموزان به بار می‌آورد؛ در حالی که ما به‌عنوان معلمان ریاضی کمتر به آن توجه داریم.  |
| گانیه (۱۹۹۵)                 | حل مسئله، فرایندی است که یادگیرنده طی آن ترکیبی از قواعد آموخته شده قبلی خود را کشف می‌کند و می‌تواند آن را به گونه‌ای به کار گیرد که او را به حل یک مسئله جدید نایل سازد. حل مسئله تنها به‌کارگیری قاعده‌ها، تکنیک‌ها، مهارت‌ها و مفاهیم یاد گرفته شده قبلی و تجربه فرد در یک موقعیت جدید نیست بلکه فرایندی است که موجب یادگیری جدید می‌شود. هنگامی که افراد در برابر مسئله‌ای قرار می‌گیرند، می‌کوشند با یادآوری دانش و تجربه خود، راه‌حلی برای آن بیابند. در واقع، در فرایند تفکر، ترکیبی از قاعده‌ها و مهارت‌های پیش‌آموخته، آزموده می‌شوند تا بتوانند با وضعیت جدید منطبق شوند و راه‌حل مسئله باشند. بنابراین نه تنها مسئله‌ی مورد نظر خود را حل می‌کنند بلکه چیزهایی جدیدی نیز می‌آموزند. |
| هایز و همکاران<br>(۲۰۰۲)     | وقتی می‌خواهید کاری انجام دهید و چگونگی آن را نمی‌دانید، با یک مسئله روبه‌رو هستید.   |
| استرنبرگ<br>(۲۰۰۵)           | حل مسئله شامل کار ذهنی برای غلبه بر موانعی است که سر راه دستیابی به هدف قرار دارد. ما زمانی در حل مسئله درگیر می‌شویم که نیاز داریم بر موانع پاسخگویی به یک سؤال، غلبه کنیم. اگر بتوانیم فوراً پاسخی از حافظه بازیابی کنیم، مسئله‌ای نخواهیم داشت. اگر نتوانیم پاسخی فوری از حافظه بازیابی کنیم، مسئله‌ای داریم که باید حل شود.   |
| دیویی (به نقل از آوئو، ۲۰۱۰) | مسئله، همه چیزهایی است که شخص را گیج می‌کند و او را در موقعیت چالش‌برانگیز قرار می‌دهد و چون حل مسئله هماهنگی تفکر شهودی و انتقادی است، هدف از آن رسیدن به راه‌حل مناسب است.  |

بیشتر پژوهش‌ها بر این باور تأکید دارند که تعریف مسئله، دارای یک ماهیت نسبی است. به این معنی که امکان دارد آنچه که برای یک فرد، مسئله به حساب می‌آید برای دیگری تنها یک تمرین ساده به‌شمار آید و یا آنچه که در یک زمان برای فردی، مسئله محسوب می‌شود در زمانی دیگر، تنها یک یادآوری به حساب آید. در ضمن دشواری و چالش موجود در مسئله باید به تفکر

و ذهن برگردد و نه این‌که تنها به یک مشکل محاسباتی مربوط شود (شونفلد، ۱۹۸۷). به هر حال باید توجه داشت که تمایل فرد به درگیر شدن و تفکر بر روی یک مشکل و دشواری نیز اهمیت دارد. همان‌طور که در جدول ۲ ارائه شده است از منظر روان‌شناسان حل مسئله، یک فرایند است و در حین فرایند نیز فراگیر به یادگیری می‌پردازد. در تمام تعاریف ارائه شده در مورد مسئله و حل مسئله، چه از دیدگاه آموزشگران ریاضی و یا روان‌شناسان، در دسترس نبودن پاسخ آماده در ابتدای حل مسئله مد نظر قرار گرفته است. اگر پاسخ فوری و در دسترس برای فرد داشته باشیم، دیگر آن موقعیت، مسئله محسوب نمی‌شود.

تعاریف مختلفی برای اصطلاح حل مسئله وجود دارد. اکثر آن‌ها شامل یک نقطه شروع، یک هدف و مسیر میان این دو هستند، که کسی که مسئله را حل می‌کند (در مقایسه با تکالیف معمولی یا الگوریتمی) هیچ دسترسی فوری به آن‌ها ندارد (شونفلد، ۱۹۸۵).



شکل ۲ حل مسئله از دیدگاه شونفلد

شکل ۲، شمایی از حل مسئله از نگاه شونفلد را نشان می‌دهد. زمانی که با یک مسئله روبه‌رو هستید و شما از روش حل آن آگاه نیستید، شما باید در یک فرایند پردازش شناختی به نام حل مسئله، مشارکت کنید. حل مسئله، یک پردازش شناختی است که هرگاه هیچ روشی برای حل مسئله ندارید، در رسیدن به هدف به‌کار گرفته می‌شود (مایر و ویتروک، ۲۰۰۶). مهم است که توجه کنیم که مسئله، به حل‌کننده بستگی دارد نه به تکلیف. یک مسئله دشوار برای یک دانش‌آموز، می‌تواند یک مسئله معمولی برای یکی دیگر (فرد با تجربه‌تر) باشد. بنابراین، تحقیق در مورد حل مسئله باید بر فرایند حل مسئله (به جای نتیجه حل مسئله) تمرکز کند. تحقیق در مورد حل مسائل و فرایندهای حل مسئله به شدت تحت تأثیر مطالعات پولیا قرار گرفته و کتاب او با عنوان چگونه آن (مسئله) را حل کنیم (۱۹۴۵)، انقلابی در شناخت فرایندهای حل مسئله و اکتشاف به‌وجود آورد (شونفلد، ۱۹۸۵؛ فرناندز، ۱۹۹۴): این کتاب نقطه عطفی در حل مسئله و انقلابی در آموزش ریاضی و حل مسئله به‌حساب می‌آید (شکل ۳).